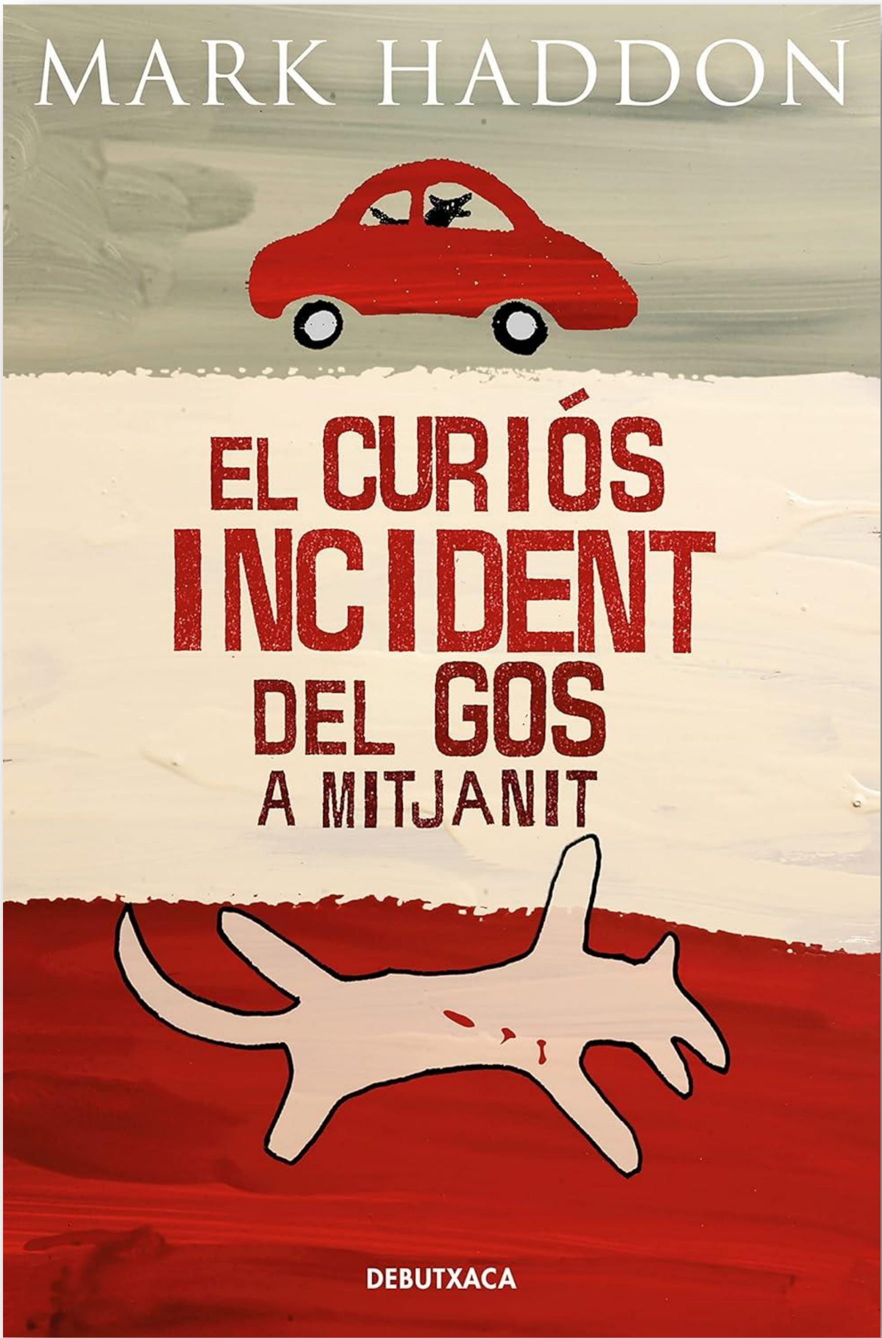
El Gust per la Lectura

Curs 2024-2025



Quadern de l'alumnat

El Gust per la Lectura 2024-2025

Tercer i quart d'ESO

El curiós incident del gos a mitjanit

Quadern de l'alumnat

Departament d'Educació i Formació Professional

Subdirecció General de Llengües

Servei de Suports i Recursos Lingüístics

Albert Armenteras Capdevila

Carles Espelt Baixauli

ÍNDEX

ABANS DE LA LECTURA 3
DURANT LA LECTURA 6
DESPRÉS DE LA LECTURA 7
PARLEM DEL LLIBRE 7
PARLEM DELS TRASTORNS DE L'ESPECTRE AUTISTA (TEA) 9
PARLEM DE MATEMÀTIQUES 10
Nombres primers 10
El volum del cub 16
Els forats negres i l'existència de Déu 20
Probabilitats 26
Algoritmes i dreceres 37
Caos 45
Doblar dosos 48
Conway 55
Equacions de segon grau 58
Rumb 65
Ternes pitagòriques 69
Annex: El mètode de diferències finites 76
VALORA QUÈ HAS APRÈS DE MATEMÀTIQUES 79

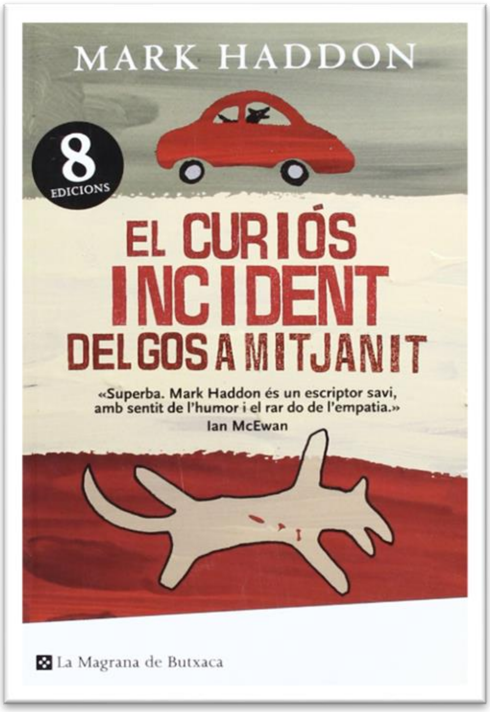
ABANS DE LA LECTURA

1. Heu sentit a parlar d'aquesta novel·la? Què en sabeu?

2. Observeu la coberta: ens dona algun tipus de pista del gènere literari en què es pot classificar?

GÈNERE	SÍ	NO	QUÈ ENS HO FA PENSAR?	
De misteri				
Còmica				
De terror			perquè...	
Romàntica				
Dramàtica				
...				

3. Tenint en compte el títol, de què us sembla que tractarà?



4. Llegiu ara la contracoberta: canviaríeu alguna de les respostes de les dues preguntes anteriors?

5. Com que heu llegit la contracoberta, ja heu descobert que el protagonista serà en Christopher, un noi que "té quinze anys i pateix una forma lleu d'autisme". Segur que heu sentit a parlar de l'autisme, però potser no sabeu que sobre aquest trastorn hi ha molts prejudicis i creences errònies.

- Per parelles, feu una pluja d'idees del que sabeu sobre l'autisme. A continuació, ajunteu-vos amb una altra parella per posar la informació en comú i valorar què penseu que és cert i què us sembla que és un prejudici.
  Us pot ajudar anotar-ho en una taula com aquesta:

QUÈ SABEM DE L'AUTISME?	CERT O PREJUDICI?

- Després de llegir el llibre, revisareu la llista i veureu en què ha canviat el vostre coneixement del TEA (trastorn de l'espectre autista).

6. Al llarg de la lectura us adonareu que l'autor coneix molt bé el comportament de les persones que tenen aquest trastorn. Si llegiu l'entrada que li dedica la Viquipèdia, descobrireu d'on li ve aquesta coneixença.
   - Qui és l'autor i quina obra té?
   - Per què coneix tan bé les persones autistes?

7. Ja que sou a la Viquipèdia, aprofiteu per comparar les versions catalana, castellana i anglesa de l'entrada sobre Mark Haddon.
   - Quina de les tres us sembla més completa?
   - Entre les tres versions heu obtingut informació complementària sobre l'autor?
   - Hi ha alguna versió que us sembli poc fiable? Per què?
   - De quina manera s'indica en la pàgina?
   - Què caldria fer per millorar-ne la validesa?

8. Aquesta novel·la ha guanyat diversos premis i ha rebut crítiques molt elogioses. La pàgina web de l'editorial en destaca dues: la d'Ian McEwan, escriptor, i la d'Oliver Sacks, neuròleg i també escriptor.
   - Tenint en compte el perfil d'aquestes dues persones, com us sembla que serà la novel·la?

9. Abans de començar el llibre, us proposem que el fullegeu per veure què hi descobrim i per començar a tenir desig de llegir-lo... com quan sentim una olor de menjar agradable i ens fa venir gana!
   - Fixeu-vos en la numeració que segueixen els capítols: és l'habitual en les novel·les? A què respon? Què ens vol fer pensar l'autor amb aquest recurs?
   - Agrupeu-vos en grups petits i contrasteu les pàgines on comença cada capítol: si totes coincideixen, és que teniu la mateixa **versió** del llibre. Si no és així, localitzeu:

L'any de publicació original	
L'any de publicació de la vostra edició	
El nom de la traductora	
El nom del dissenyador de la coberta	
El nom de l'editorial	
El lloc on s'ha imprès	
Informacions diferents entre versions	

- Veureu que al llarg dels capítols apareixen moltes il·lustracions. Quina funció us sembla que tenen?

10. A en Christopher li agraden molt les matemàtiques i ho demostra al llarg del llibre amb molts dels temes de què parla. Al llarg de la lectura, us proposarem onze aturades per treballar alguns d'aquests temes de matemàtiques que hi trobareu. Probablement d'alguns ja n'heu sentit a parlar o els heu treballat a classe.

    - Per això, individualment, és aconsellable que feu memòria i penseu què en sabeu de cadascun:

	TEMA/CONCEPTE	QUÈ EN SÉ
1	Nombres primers	
2	El volum del cub	
3	Forats negres matemàtics	
4	Probabilitats	
5	Algoritmes i dreceres	
6	Caos	
7	Potències de dos	
8	Conway	
9	Equacions de segon grau	
10	Rumb	
11	Ternes pitagòriques	

    - Després de llegir el llibre, revisarem aquesta taula per comprovar què hem après.

11. A mesura que llegiu, us adonareu que l'estil literari del llibre és força original. Ara fareu un cop d'ull en grups de quatre persones per començar-ho a veure. Després, al llarg de la lectura, haureu de comprovar si aquest estil es manté.

    - Llegiu el capítol 2 i comenteu què us crida l'atenció de la manera d'escriure.

    - Al començament del capítol 3, en Christopher es descriu. Quines característiques esmenta? Us sembla que enumera prou característiques perquè us feu a la idea de com és?

    - Fixeu-vos ara en aquestes altres descripcions que fa en capítols posteriors i comenteu què tenen en comú entre si i quina intenció deu tenir l'autor quan incorpora descripcions d'aquest tipus.

"La Siobhan té els cabells rossos i llargs i porta unes ulleres de plàstic verd. I el senyor Jeavons fa olor de sabó i porta unes sabates marrons, cadascuna de les quals té, aproximadament, 60 forats circulars minúsculs."	"Hi havia una policia i un policia. La policia tenia un foradet a les mitges, a l'alçada del turmell esquerre, i una rascada vermella al mig del forat. El policia portava una fulla taronja molt grossa enganxada a la sola de la sabata que li sobresortia per un costat."

- Al capítol 7, el protagonista fa una reflexió metaliterària sobre la seva forma d'escriure i, en general, sobre la creació literària. Localitzeu-hi què diu sobre:
    - Els recursos estilístics
    - Les convencions dels diversos gèneres literaris
    - Les estratègies per aconseguir que la trama atrapi el lector de bon començament
    - ...

12. Al capítol 7 s'esmenta una altra novel·la. Quina és? En altres capítols en Christopher farà esment del seu protagonista...

DURANT LA LECTURA

El nostre consell bàsic és que us submergiu en la lectura i no feu res més. D'aquesta manera, podreu gaudir sense interrupcions de la història que en Christopher té per explicar-vos. I no us oblideu d'apartar el mòbil mentre llegiu...

Ara bé, de cara a les activitats que us proposarem després d'acabar el llibre, serà bo que retingueu algunes parts del text. No cal que ho feu en forma d'escrit, n'hi ha prou a indicar-ho amb una nota de llapis al marge del text o amb un pòstit a la pàgina on ho heu trobat.

- Concretament, podeu marcar les parts que us han donat pistes per entendre com funciona el raonament d'en Christopher, per exemple:
    - Reaccions que té
    - Estratègies que aplica per calmar-se
    - Recursos que té per fer alguna cosa que s'ha proposat
    - En què es fixa
    - ...

- També podeu escriure notes al marge de les pàgines on trobeu elements que us puguin ajudar a caracteritzar l'estil del llibre: les descripcions, els recursos literaris, l'estructura narrativa...

No cal fer-ho de manera exhaustiva, perquè després de llegir compartirem les descobertes i allò que a algú li hagi passat per alt segurament ho aportarà una altra persona.

El més important és que gaudiu de la novel·la!

DESPRÉS DE LA LECTURA

PARLEM DEL LLIBRE

1. Què us ha semblat la novel·la? La recomanaríeu? Per què sí o per què no?

2. Com és en Christopher? Si haguéssiu de completar la descripció que fa d'ell mateix al capítol 3, què afegiríeu que fos significatiu?

3. A banda de saber que el comportament del protagonista està condicionat pel seu trastorn, quina opinió us n'heu fet? Seleccioneu les caselles que reflecteixin millor la vostra opinió i, a la columna de la dreta, justifiqueu-vos:

He simpatitzat amb en Christopher	
Ha arribat a fer-se odiós	
M'ha commogut	
He entès el seu patiment	
M'ha semblat un personatge excessiu	
...	

4. Què opineu dels altres personatges: tenen profunditat o simplement són un recurs per interactuar amb el protagonista? Enteneu les seves reaccions? Feu un comentari breu de cadascun:

PARE	MARE	SIOBHAN	SRA. SHEARS	SR. SHEARS

5. El títol us ha permès anticipar de què tractaria la història? Quin és el tema en realitat? Per què us sembla que la novel·la té aquest títol?

6. Sabríeu resumir el relat en tres o quatre frases?

7. A partir del resum que heu fet, podeu identificar les parts del relat?
   - Quines parts diferents té? Quins capítols inclou cadascuna?
   - On situaríeu el clímax de la història?
   - Quin element clau inclou el tancament?

   Si us és més fàcil, podeu explicar-ho amb l'ajut d'un organitzador gràfic.

8. El llibre està escrit en forma de diari personal.
   - Quines característiques del diari podeu identificar?
   - Fixeu-vos que en alguns capítols l'autor fa un exercici de metaescriptura, quan en Christopher parla del que està escrivint o de quines qualitats ha de tenir. Identifiqueu en quins moments passa això i què s'hi diu.

- En aquesta reflexió sobre el fet d'escriure, en Christopher comenta diverses vegades que li deixa llegir el diari a la Siobhan. De quines maneres orienta la resposta la Siobhan?

9. Segurament ja heu descobert que els capítols s'estructuren com una cremallera: intercalant un capítol d'acció (a vegades dos) i un o dos de reflexions sobre temes diversos.

   Molts d'aquests temes tenen a veure amb problemes de matemàtiques, alguns dels quals hem treballat en aquest quadern. Però també hi ha altres temes que plantegen altres problemes.
   - Feu una llista d'aquests altres temes que aborda en Christopher en les seves reflexions que no hàgim treballat al llarg del quadern.

10. Com descriuríeu l'estil del llibre? Quines característiques us sembla que són més evidents? Complementeu el que n'hem dit abans de llegir-lo.

11. Els capítols 107 i 139 esmenten les novel·les d'Arthur Conan Doyle sobre Sherlock Holmes, un personatge que en Christopher admira i que intenta imitar. A banda d'aquests dos capítols explícits, quins elements heu identificat al llarg de la novel·la que reten homenatge a l'obra de Conan Doyle?

Imatge: [Openclipart]

12. Us sembla que en Christopher té el nivell de matemàtiques que correspon a una persona de quinze anys, o creieu que està per sobre o per sota del nivell esperat?

PARLEM DELS TRASTORNS DE L'ESPECTRE AUTISTA (TEA)

1. Al llarg de la novel·la, el noi demostra que és capaç de fer raonaments complexos, però, en canvi, no entén els acudits o el sentit figurat. Això és perquè té un trastorn de l'espectre autista (TEA).
    - En quin sentit s'empra la paraula *espectre* en aquest cas? Quin canvi suposa respecte al diagnòstic d'autisme?

2. Compartiu les anotacions que heu anat fent durant la lectura i aprofiteu-les per llistar els comportaments i actituds d'en Christopher que fan pensar que té un TEA.

3. A continuació, contrasteu-les amb fonts especialitzades per verificar quines permeten caracteritzar el personatge com a TEA.
    - Us recomanem la pàgina de Canal Salut i la de l'associació Confederación Autismo España.
    - També podeu mirar algun dels vídeos de la Fundación Orange. Per exemple, Academia de Especialistas.

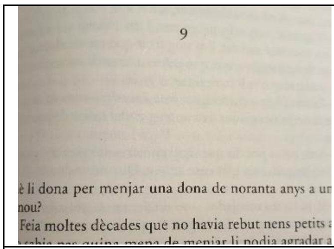
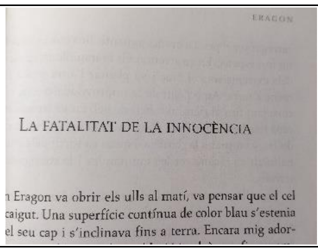
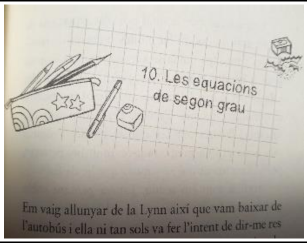
4. A partir de la novel·la, és possible que hagi canviat la vostra percepció sobre l'autisme. Parleu-ne a classe:
    - En què ha canviat la vostra opinió sobre les persones autistes?
    - Teníeu algun prejudici o alguna creença errònia que hàgiu pogut desmuntar a partir del llibre? Quina o quines?
    - Quines qualitats admireu d'en Christopher?
    - Si tinguéssiu un company amb TEA al centre o en alguna activitat de lleure, penseu que sabríeu com interactuar-hi?
    - En Christopher va a una escola on hi ha alumnat amb necessitats educatives especials de molts tipus. Penseu que, en el seu cas, estaria millor en una aula ordinària? Quins avantatges i quins inconvenients li suposaria? Quines dificultats implicaria per al centre? Quins aspectes positius aportaria a la resta d'alumnes del grup?

5. Escolteu aquesta entrevista a Julio Manrique, que va portar l'adaptació teatral de la novel·la al Teatre Lliure, i comenteu-la:
    - Com es relaciona en Christopher amb les persones?
    - El seu rebuig absolut a la mentida, per bé que es pot considerar com una qualitat positiva, li comporta problemes. Quina relació té això amb el teatre, segons Manrique?
    - Com està plantejada l'obra de teatre?
    - En l'obra, la reflexió final que fa en Christopher es formula com una pregunta. Què li respondríeu vosaltres?

PARLEM DE MATEMÀTIQUES

Nombres primers

1. Hi ha diferents maneres d'indicar els capítols d'un llibre. Com les descriuríeu en els casos següents?

En aquest llibre, la titulació dels capítols és una mica especial, i no és fàcil classificar-la en cap de les tres categories de més amunt: certament, els títols són nombres, però no pas correlatius en la seqüència de nombres naturals.

2. Què enteneu quan es parla de *seqüència numèrica*?
3. Podríeu descriure amb paraules alguna altra seqüència numèrica diferent de la dels nombres naturals?
4. Creieu que hi ha més maneres per definir una seqüència numèrica, més enllà de les paraules?

De fet, els títols dels capítols del llibre també segueixen una seqüència, però diferent de la dels naturals: la seqüència dels nombres primers. O sigui que si volem saber, per exemple, quants capítols hem llegit en un moment determinat del llibre, haurem d'esbrinar quin és el número d'ordre, dins la seqüència dels nombres primers, del nombre que apareix a la capçalera del pròxim capítol.

5. Com que els nombres primers són relativament escassos (i cada vegada més si anem pujant en la seqüència dels naturals), el títol del capítol serà un nombre cada vegada més gran respecte al nombre real del capítol si el comptéssim en l'ordre dels naturals.
   a) Quants capítols té el llibre en realitat?
   b) Continueu la llista següent, contrastant el nombre que li assigna l'autor amb la posició del capítol en el llibre:

C	Capítol primer
3	Capítol segon
5	Capítol tercer
7	...
...	...

6. A més dels capítols dels llibres, hi ha altres temes que necessiten numerar-se. En alguns casos, el número aporta informació addicional, més enllà de la seva posició correlativa en l'ordre dels nombres naturals.
    - Esbrineu quina informació aporta la numeració de:

QUÈ ES NUMERA	COM ES NUMERA	QUINA INFORMACIÓ APORTA LA NUMERACIÓ
Carreteres	Amb una combinació de lletres i nombres.	Indica el tipus de carretera i l'orientació del seu recorregut.
Sortides d'autopista		
Habitacions d'hotel		

    - Si se us ocorren més coses amb aquesta mena d'ordenació metanumèrica, afegiu-les a la darrera fila de la taula.

En Christopher sembla que té molta memòria. O almenys sap fer servir molt bé la que té. Perquè, de fet, la memòria es pot entrenar. Diuen que, com més la fas servir, més fàcil és afegir-hi coses noves! També hi ha tècniques que ens poden ajudar a memoritzar, com ara les regles mnemotècniques.

El cas és que ell assegura que se sap tots els països del món i les seves capitals, i tots els nombres primers fins al 7507, que no són pas pocs: exactament 950. I no sembla que hi pugui haver una regla mnemotècnica fàcil per recordar això. D'altra banda, anar-ho descobrint sobre la marxa és molt problemàtic.

7. Podem saber, però, que un nombre primer només pot acabar en quatre xifres diferents. Sabeu quines?
8. Això és fàcil de recordar i, per tant, d'entrada ja podem descartar un 60 % dels nombres. I també podem saber molt fàcilment que del 40 % restant que ens queden en podem eliminar un de cada tres. Com ho podem fer?
9. Una vegada fets aquests cribratges elementals, quants nombres dels 7507 inicials ens quedarien per comprovar?
10. Ben segur que l'esforç mental que suposa anar provant factors que puguin dividir un determinat nombre és immens. Però no cal que provem tots els nombres més petits que aquell del qual volem saber la primalitat. Sabeu fins a quin nombre cal provar la divisió per estar segurs que un nombre és primer?

De tota manera, com segurament ja sabeu, per a nombres tan petits com ara el 7507, qualsevol calculadora científica o aplicació matemàtica ens pot proporcionar aquesta informació a l'instant. No seria el mateix per a nombres molt més grans. En això precisament es basa el sistema criptogràfic més segur que es fa servir ara mateix.

Mentre no trobem una pauta o fórmula clara i universal que il·lumini la boira que envolta els nombres primers, només ens queda jugar amb els indicis sorprenents en els quals, de tant en tant, es manifesta el seu misteri.

“Fórmules” de nombres primers

Tal com intueix en Christopher en construir el garbell d’Eratòstenes, en observar una taula de nombres primers, ens preguntem si hi ha pautes o raons en la sèrie dels nombres primers.

Una solució excel·lent en aquest sentit seria trobar alguna mena de “fórmula” que donés tots els nombres primers (i no altres nombres) sense ometre’n cap. Explorem, a continuació, alguns intents basats en polinomis de segon grau:

- Quan $n=0$, $n^2+n+17=17$ que és un nombre primer.
- Quan $n=1$, $n^2+n+17=19$ que també ho és.

11. Quin és el primer valor de n per al qual n^2+n+17 no és un nombre primer?

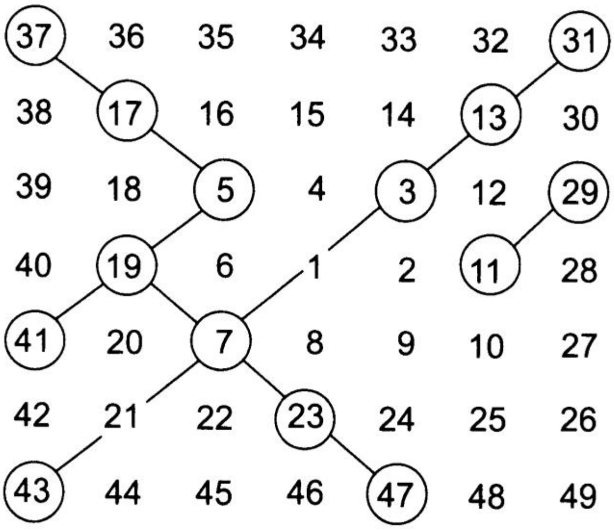
Per a aquest apartat i per als següents us pot ajudar la potència de càlcul de l’entorn CAS de GeoGebra o programes similars.

12. Quan $n=0$ o $n=1$, $n^2-n+41=41$, que és un nombre primer. Quin és el primer valor de n per al qual n^2-n+41 no és un nombre primer?
13. Quan $n=0$, $n^2+n+41=41$, que és un nombre primer. Quin és el valor més petit de n per al qual n^2+n+41 no és un nombre primer? Per què creieu que és així?
    - Observeu que entre les fórmules dels apartats 12 i 13 hi ha una relació senzilla. La podeu veure? (per què el valor de n^2-n+41 quan $n=11$ és el mateix valor que el de n^2+n+41 quan $n=10$?)
14. Quina classe de valor produeix n^2+n+41 quan $n=-1$? I quan $n=-2$? Quin és el primer valor negatiu de n per al qual n^2+n+41 no és un nombre primer?
15. Feu servir les respostes anteriors per trobar una expressió del tipus n^2+bn+c que generi un nombre primer per a cada valor de n des de 0 fins a 79.

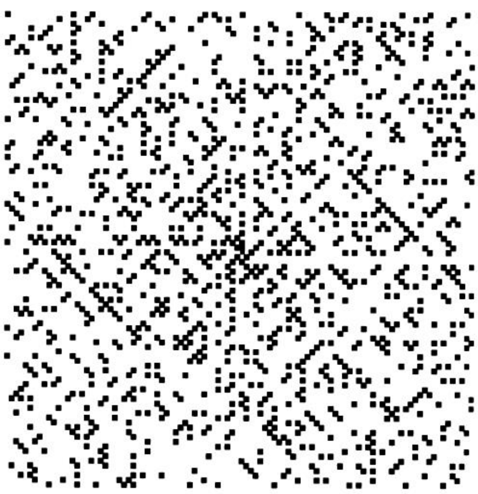
Encara que se sap (i no és difícil de demostrar) que no hi ha cap fórmula polinòmica en una variable que generi tots (i només) els nombres primers, durant molts segles els matemàtics pensaven que era impossible obtenir una fórmula que generés tots els nombres primers. Sorprenentment, a la dècada dels setanta es van descobrir fórmules en aquest sentit, però dissortadament van resultar ser molt complicades i no van aportar gens d’interès.

Una galàxia espiral de nombres primers

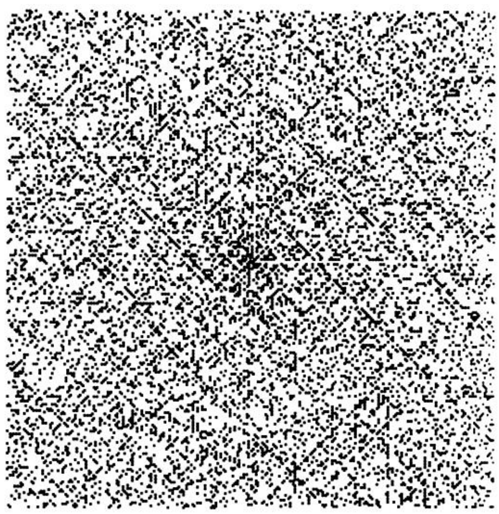
L'any 1963, el matemàtic Stanislaw Ulam, mentre s'avorria en una conferència, va començar a gargotejar, construint una espiral de nombres enters, i va anar encerclant els nombres primers. Va observar que els nombres primers tendien a disposar-se en línies diagonals, cosa que li va cridar l'atenció.



Engrescat amb la descoberta, ho va provar començant l'espiral amb diferents nombres, 17 o 41, que també donaven diagonals riques en nombres primers. Va continuar dibuixant espirals fins a 10 milions amb l'ordinador central MANIAC II de Los Alamos, que produïen galàxies de nombres primers com les següents (Ulam treballava a Los Alamos en el projecte de la bomba atòmica):



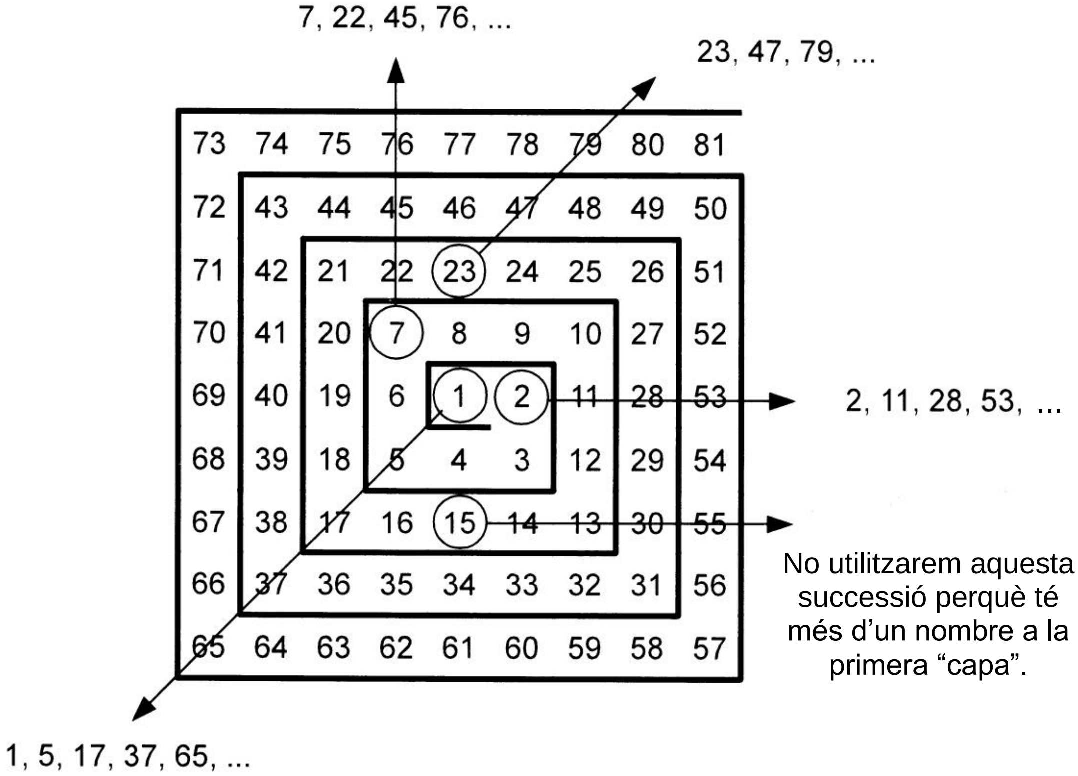
Espiral d'Ulam d'1 a 10.000



Espiral d'Ulam d'1 a 100.000

En [aquesta pàgina](#) podreu experimentar pel vostre compte amb l'espiral d'Ulam.

16. A l’espiral de nombres següent es dibuixen línies rectes des de diferents inicis per produir successions com les que es mostren a continuació:



Observeu les successions que heu generat i, consultant l’annex “El mètode de diferències finites”:

- Proveu d’explicar les “regles” que hi trobeu.
- Mireu de trobar una expressió en termes de n per al terme n-èsim de les successions.

17. A l’espiral de nombres, considereu:

a) La successió 5, 19, 41, 71, ...

- En Manel vol saber si aquesta successió contindrà, només, nombres primers. Trobeu el terme general i expliqueu per què en Manel no té raó.

b) La Sara observa els nombres de la línia 2, 12, 30, 56, ... i vol saber si seran tots parells.

- Trobeu el terme general de la successió i expliqueu per què tots els termes de la successió són parells.

c) La Roser s’ha fixat en la successió 3, 15, 35, 63, ... i pensa que tots els nombres després del 3 no seran primers.

- Trobeu el terme general de la successió.
- Descomponeu l'expressió del terme general i expliqueu per què l'únic nombre primer de la successió és 3.
- Com podeu veure que tots els nombres de la successió són imparells a partir de la descomposició?

d) Construïu una espiral de nombres centrada en el nombre 41. Assegureu-vos que tingui la mateixa orientació que la representada a l'activitat 16 (començant cap a la dreta i girant en sentit horari).

- .Què passa amb la diagonal que va de l'extrem superior esquerre a l'extrem inferior dret? Serà sempre així? Ho podeu justificar?

Stanislaw Ulam. Imatge: Wikimedia Commons

El volum del cub

Al capítol 23, com que en Christopher ha pegat un policia, se l'emporten a la comissaria i, després de fer-li deixar tots els objectes que porta a sobre, el tanquen en un calabós.

1. En Christopher troba que el calabós és agradable. Per què us sembla que ho diu? Quina relació penseu que té amb el seu trastorn?

Al llarg del llibre veurem que en diverses ocasions el nen s'amaga en llocs estrets o petits i s'hi troba molt bé, ja que se sent protegit i li fa la impressió que té l'espai que l'envolta, d'alguna manera, controlat. En canvi, els espais oberts i variats, amb molts estímuls sensorials, li causen molt neguit.

Amb un paràgraf no gaire llarg fa una descripció força completa de tot l'espai del calabós.

2. Sabríeu descriure algun espai tancat en el qual estigueu sovint? Per exemple, la vostra habitació, o l'aula. Quins elements en destacaríeu? En quins coincidiríeu amb en Christopher?

Fa uns quants segles, l'astrònom Galileu va afirmar que l'univers estava escrit en llenguatge matemàtic. En Christopher sembla que sap veure aquest llenguatge en allò que l'envolta. Per això, una de les coses que observa primer del seu calabós és que és un cub gairebé perfecte i, per tant, sabent el que mesura un costat qualsevol, pot calcular el volum d'aire que conté.

3. Encara que, de fet, el volum d'aire en aquell moment és una mica més petit. Sabeu per què?

El volum d'aire que ell calcula seria només si l'habitació estigués complement buida, és clar. En realitat, el que ell calcula és el volum de l'habitació. I en aquest volum, segons la seva descripció, s'hi encabeixen un banc encoixinat, ell mateix i l'aire que n'ocupa la resta.

En un cub en tenim prou de prendre una mesura per saber-ne el volum, però la majoria dels espais que podem trobar no són tan regulars.

4. En quina mena d'espai esteu ara mateix? Quantes mesures diferents hauríeu de prendre per calcular-ne el volum?

Fins ara ens hem mirat els volums com si hi fóssim dins, però també ens els podem mirar des de fora. Qualsevol objecte ocupa un volum, això està clar, però normalment ens interessem a calcular-lo quan aquest objecte s'ha concebut expressament per contenir altres coses, generalment líquids.

5. En podríeu enumerar unes quantes?

Si aquests contenidors són rectilinis i regulars és fàcil calcular-ne el volum, però no sempre és així.

6. Com calcularíeu el volum d'una cullera, una copa qualsevol o un porró?

Centrant-nos ara en els més regulars, com ara un bric, del qual és fàcil saber-ne el volum, ens podríem preguntar quina forma seria la més adient per fabricar-lo a fi d'obtenir el màxim volum amb la despesa mínima de material per construir-lo...

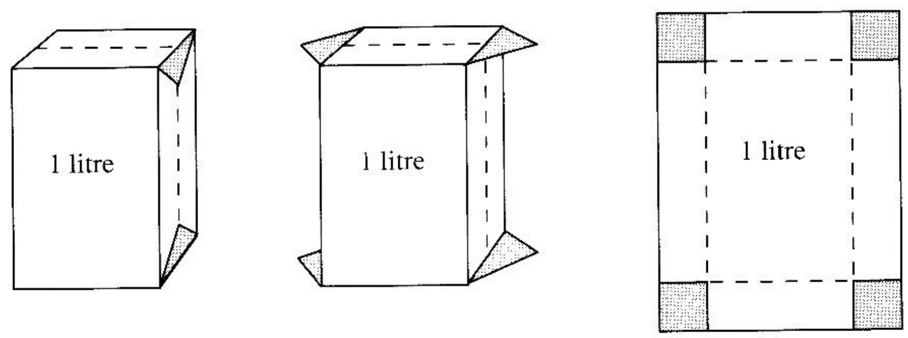
7. Quina creieu que seria la forma més adient?

Envasos de líquids

En la primera part d'aquest projecte investigarem l'àrea de cartró necessari per fer un envàs rectangular d'1 litre de cabuda. En l'extensió considerarem la superfície mínima d'envasos de diferents mides, però totes d'1 litre de cabuda.

La forma de construcció es pot veure al dibuix de sota, on l'àrea de cartró "desaprofitada" es mostra enfosquida en cadascun dels diagrames. Us pot ser d'ajuda observar un envàs buit de disseny similar.

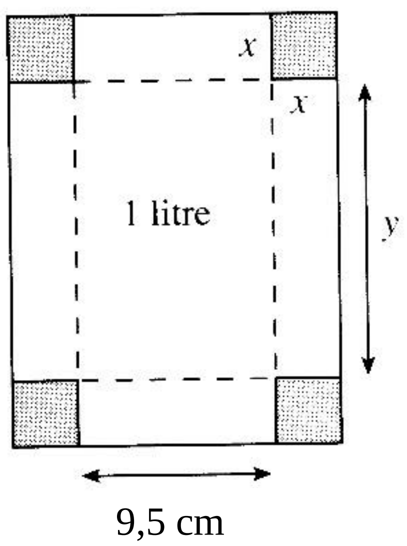
En aquest projecte ignorarem l'àrea de cartró de la part de dalt, de sota i dels dos laterals de l'envàs que s'han usat per enganxar les dues parts i l'àrea que se superposa.

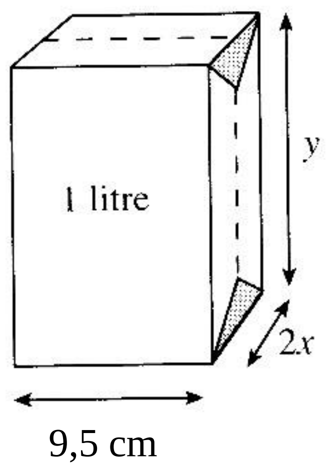


Meitat de davant de l'envàs, aplanada

Observem que cadascuna de les regions enfosquides del dibuix correspon a només la meitat de l'àrea total de cartró "desaprofitat".

8. Un fabricant decideix construir envasos de litre de 9,5 cm d'amplada.





Expliqueu per què:

a) $y = \dfrac{52,63}{x}$

b) L'àrea aproximada total (A cm^2) de cartró necessari per construir l'envàs és definida per l'equació:

$$A \approx 8x^2 + 38x + \frac{1000}{x} + 210$$

9. Copieu i completeu la taula següent:

x	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$8x^2$				72				
$38x$				114				
$\dfrac{1000}{x}$				333,3				
210				210				
A		818		729,3				

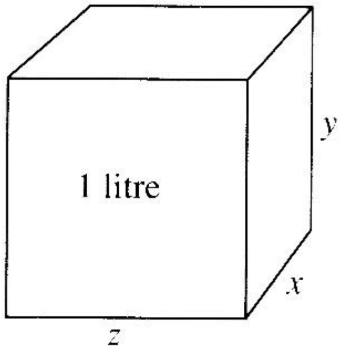
a) Dibuixeu una gràfica de A en funció de x. Per a aquesta gràfica i per a les altres que es proposen a l'activitat, podeu ajudar-vos de GeoGebra o de programes similars.

b) A partir de la gràfica construïda, trobeu l'àrea mínima de cartró necessària per fer un envàs i, per tant, les dimensions de l'envàs. Compareu la vostra resposta amb les mesures d'un envàs habitual de 9,5 cm d'amplada.

10. Com podríeu comprovar si l'afirmació que es fa en aquest anunci publicitari és certa? Feu una petita investigació per comprovar-ho i escriviu un informe explicant-ne el resultat i el procés que heu seguit.

(Volum de l'esfera = $\dfrac{4}{3}\pi r^3$).

11. El fabricant considera altres dimensions que es podrien fer servir per als seus envasos de litre.



a) Quan $z = 8$, trobeu una equació per donar l'àrea total (A cm^2) de l'envàs ja completat en termes de x (en aquest cas no tenim en compte el cartró desaprofitat per fer l'embalatge, sinó només la seva superfície exterior una vegada muntat).

- Dibuixeu una gràfica de A en funció de x per a $8 \leq x \leq 13$.
- Indiqueu l'àrea superficial mínima per a aquesta amplada de l'envàs.

b) Repetiu la part a) quan:

$z = 9$ cm $\quad$ $z = 10$ cm $\quad$ $z = 11$ cm $\quad$ $z = 12$ cm

- Dibuixeu cada gràfica en els mateixos eixos i indiqueu en cada cas la mínima àrea superficial per a cadascun dels quatre envasos.

c) Justifiqueu quina penseu que és la forma de l'envàs amb àrea superficial mínima i demostreu que aquesta forma d'envàs no serà més econòmica de construir que la forma de les activitats 8 i 9.

Imatge: Wikimedia Commons

Els forats negres i l'existència de Déu

El capítol 61 és un dels més reflexius que podem trobar al llibre. S'hi tracten temes filosòfics profunds, com ara l'existència de Déu, i altres de física molt avançada, com les característiques dels forats negres.

En Christopher explica que la senyora Forbes li va dir que quan la seva mare va morir va anar al cel. El noi, que no creu en l'existència del cel, justifica aquest convenciment de la senyora en el fet que és molt vella.

1. Creus que és correcta aquesta opinió d'en Christopher basant-se en l'edat de la senyora? Argumenteu la vostra opinió. A continuació, contrasteu-la amb altres alumnes de la classe que pensin el contrari.

La seva opinió és que la gent creu en el cel perquè no els fa gens de gràcia morir-se, perquè és com si s'adormissin i no es despertessin mai més, però sense somniar. I els treuen de casa, els porten a un cementiri i els hi deixen per sempre. Això si no els cremen i, en un moment, no son res més que fum i cendra. De tota manera, en Christopher no veu tan tràgic aquest destí.

2. Per què ho veu així? Penseu que creure en el cel i en l'existència de Déu respon al que opina en Christopher o hi ha altres motius?

En una altra conversa que té en Christopher amb el reverend Peters, aquest li assegura que el cel no està al nostre univers, sinó en un lloc completament diferent. A la qual cosa ell li respon que no hi ha res fora de l'univers, com a molt, potser, hi ha alguna cosa a l'altra banda d'un forat negre, que és el que se'n diu una "singularitat", i això vol dir que és impossible descobrir què hi ha més enllà, ja que la seva gravetat és tan forta que s'ho empassa tot i res en pot fugir. I que, tot i així, no coneix cap difunt a qui hagin enviat en un coet a l'altra banda d'un forat negre.

3. Creieu que els forats negres són una invenció teòrica o que existeixen realment? De quina manera ho justificaríeu?
4. Sabeu si se n'han localitzat a la nostra galàxia?

Els forats negres atrauen sense remei tot el que s'hi acosta. I quan un objecte qualsevol ha estat capturat per ell, l'escapatòria és impossible. En això s'assemblen al que es coneix com a "forats negres matemàtics". Aquesta mena de singularitats matemàtiques, però, permeten que ens hi acostem i hi juguem sense cap perill per a la nostra integritat física, cosa que seria molt improbable si ens acostéssim a tafanejar un forat negre astronòmic. De fet, es tracta de nombres cap als quals acaba caient qualsevol altre nombre quan se li aplica recurrentment una operació matemàtica concreta. I com a bon forat negre, quan hi han caigut. Ja no en poden sortir mai més…

Forats negres matemàtics

A l'univers físic hi ha uns objectes estranys que s'anomenen forats negres, que són regions a l'espai tan denses i que tenen un camp gravitatori tan potent que res, ni tan sols la llum, en pot escapar.

A l'univers matemàtic també hi podem trobar forats negres, nombres sense cap interès aparent, dels quals cap altre nombre en pot escapar quan apliquem certes operacions.

Aquí en teniu un exemple senzill:

5. Seguiu la successió de passos d'aquesta taula. Què observeu en el resultat final?

Passos	Provem el 5	Provem el 7	Tria tu el nombre
Tria un nombre	5		
Multiplica'l per 6	30		
Suma 12 al resultat	42		
Divideix-lo per 3	14		
Resta'n el doble del nombre original	4		

Com heu vist, el resultat final és sempre 4, sigui quin sigui el nombre triat. És a dir, sigui quin sigui el nombre original, tots els nombres "cauen en el forat negre" 4.

a) Podeu explicar per què passa això?

b) Inventeu un forat negre matemàtic del tipus anterior que tingui com a valor el nombre 10.

6. Ara veurem un altre exemple de forat negre matemàtic més complicat. Seguiu aquests passos:

Escriu un nombre enter positiu. → Escriu tots els seus divisors, incloent-hi l'1 i el mateix nombre. → Suma totes les xifres dels divisors (aquest nombre s'anomena "suma de dígits"). → Repeteix el procés amb el resultat que has obtingut fins que tinguis una bona raó per parar.

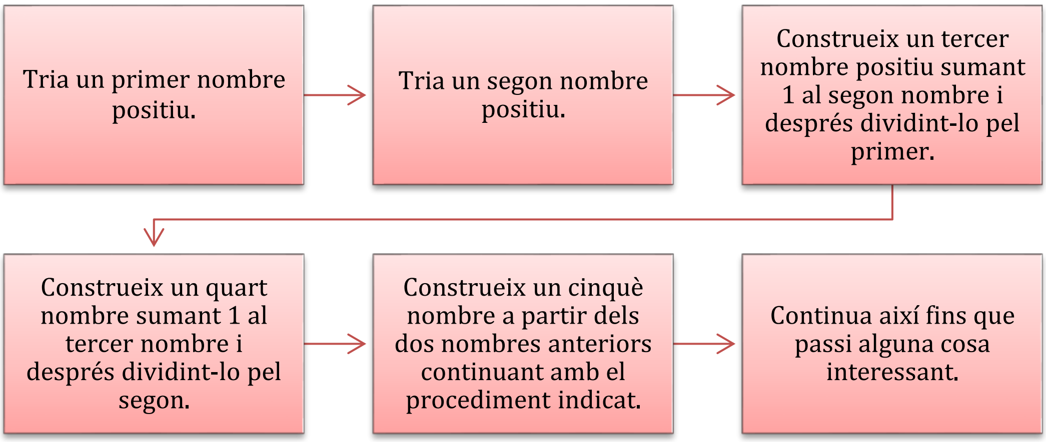
Per exemple, si heu triat el nombre 45, els divisors són 1, 3, 5, 9, 15 i 45, i la suma dels dígits serà 1 + 3 + 5 + 9 + 1 + 5 + 4 + 5 = 33.

a) Ara continueu aplicant el procediment al nombre 33, fins que cregueu que heu de parar. Per què heu parat?

b) Proveu d'aplicar aquest procés a altres nombres enters i positius. Què passa?

c) El nombre en el qual sempre s'acaba és el forat negre. Mireu de trobar una explicació de per què això sempre serà així.

7. Considereu una successió de nombres a partir de les instruccions següents:



a) Construïu la successió començant amb els nombres 4 i 7.

b) Construïu la successió començant amb dos altres nombres. Passa el mateix que abans? Ho podeu explicar?

Així com en els exemples anteriors sempre es va a parar a "forats negres" d'un nombre, aquesta vegada es va a parar a un forat negre cíclic de cinc nombres. Aquest segon tipus de forats negres també es poden anomenar *remolins*.

Ara plantejarem un seguit de situacions que ens porten a forats negres i també a remolins. En cada cas haurem de trobar el forat negre o els remolins als quals ens porten i, si és possible, donar una explicació de per què es dona aquesta situació.

8. Comenceu amb un nombre natural, per exemple, 9288759. Compteu el nombre de xifres parells, el nombre de xifres imparells i el nombre total de xifres. A partir d'aquests tres nombres, formeu un segon nombre i repetiu el procediment.

- Per exemple, del nombre 9288759 obtindrem el nombre 347 i anirem seguint el procediment. Què passa?

- Aplica-ho a altres nombres i observa el que passa.

Assegureu-vos d'aplicar-ho a nombres molt grans.

9. Comenceu amb un nombre enter. Escriviu-ne el nom en català, compteu el nombre de caràcters en l'escriptura (compteu també els espais i els guions) per obtenir un nou nombre i repetiu el procediment. Què passa?

  - Per exemple: 163 → cent seixanta-tres → 18 → ...

- Completeu aquest exemple i apliqueu aquest procediment a altres nombres. Què s'observa?
- També ho podeu provar en anglès, en castellà o en altres llengües que conegueu.

10. Proveu ara aquest procediment:

Selecciona un nombre enter positiu. → Eleva cadascuna de les seves xifres al quadrat i troba la suma d'aquests quadrats. → Continua aquest procediment fins que passi alguna cosa interessant.

- Exemple: $31 \rightarrow 3^2 + 1^2 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1 \rightarrow 1^2 = 1 \rightarrow 1^2 = 1...$

  En aquest exemple, el nombre de partida ha quedat atrapat en el "forat negre" 1.

a) Comenceu el procediment amb el nombre 97. Quin forat negre resulta?

- Si ara comencem amb el 81, el procediment ens portarà a un altre tipus de forat negre:

  $81 \rightarrow 8^2 + 1^2 = 65 \rightarrow 61 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 37$

  Com que el 37 ja ha sortit a la successió, resultarà que la successió es repetirà a partir d'aquest punt i caurà en un forat negre cíclic o remolí.

b) Començant amb el nombre 204, el procediment generarà un forat negre nou? Expliqueu-ho.

c) I si comencem amb 420?

d) Proveu altres nombres d'una, dues i tres xifres. Podeu trobar nous forats negres?

11. Repetiu el mateix procés però sumant els cubs de les xifres en lloc dels quadrats.

Per exemple:

$369 \rightarrow 3^3 + 6^3 + 9^3 = 27 + 216 + 729 = 972 \rightarrow 1080 \rightarrow 513 \rightarrow 153 \rightarrow 153 \rightarrow ...$

a) Comenceu amb 660. Què passa?

b) Comenceu amb 621 i 494. Què passa ara?

c) Els nombres que cauen al forat negre 153, quina classe de nombres són? Què tenen en comú?

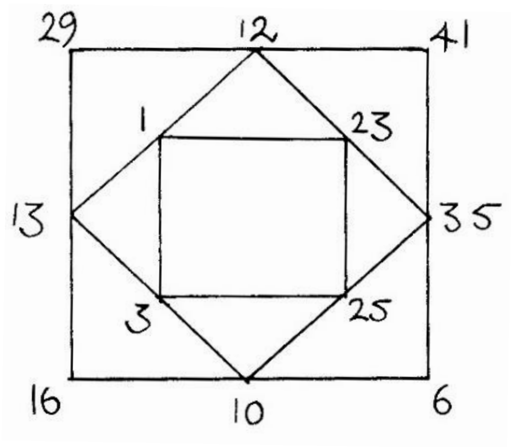
d) Què passa si comenceu amb el nombre 256?

e) En aquest procediment són possibles nou forats negres o remolins. N'heu trobat tres. En podeu trobar algun altre?

12. Seleccioneu quatre nombres enters positius i escriviu-los en els vèrtexs d'un quadrat. Al punt mitjà de cada costat, anoteu-hi la diferència entre els dos nombres que hi ha escrits als extrems d'aquest costat.

    a) Considereu aquests nous nombres com a vèrtexs d'un nou quadrat i repetiu el procés indefinidament fins que passi alguna cosa interessant.

    b) Expliqueu què passa i intenteu justificar per què passa.



Quatre-cents noranta-cinc

13. Escriviu qualsevol nombre de tres xifres que no tingui les tres xifres iguals. Per exemple, el 326.

- Ara escriviu els nombres de tres xifres més gran i més petit que es poden formar amb les xifres del nombre. Per a 326 obtindreu 632 i 236, respectivament.
- A continuació, calculeu la diferència d'aquests dos darrers nombres. En el nostre cas, serà 623 – 236 = 396.
- Finalment, repetiu el procés amb el nombre 396. Aquesta vegada obtindreu 963 – 369 = 594.

Una repetició més ens dona 954 – 459 = 495. I si ho tornem a repetir, ens torna a reproduir el mateix nombre.

Es pot demostrar que sigui quin sigui el nombre de partida (que no tingui les tres xifres iguals) sempre arribarem, si seguim el procés, al nombre 495.

   a) Proveu-ho amb altres nombres i observeu què passa (si en alguna etapa, en fer la diferència, en resulta un nombre amb menys de tres xifres, convertiu-lo en un nombre de tres xifres afegint-hi al davant un nombre apropiat de zeros). Per tant, 495 és un forat negre d'aquest procés aplicat a nombres de tres xifres.

b) Mireu de demostrar per què això és així. Primer tracteu de justificar que després de la primera resta en resulta un nombre de tres xifres, on la xifra del mig és 9 i la suma de la primera xifra i la darrera xifra també és 9.

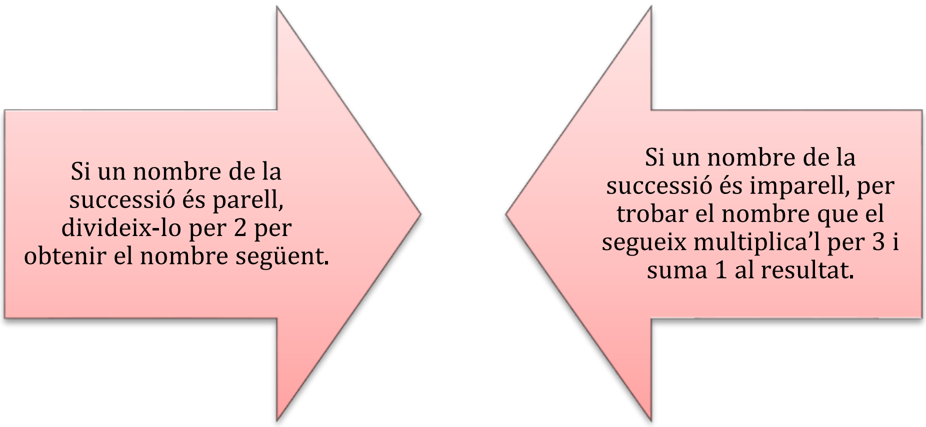
c) Expliqueu què passa (i intenteu explicar el perquè) quan s'aplica el procés a nombres de dues xifres i a nombres de quatre xifres. Si hi ha forat negre, quin és?

d) També podeu estendre la investigació a nombres de cinc xifres.

Algunes d'aquestes propietats van ser estudiades pel matemàtic hindú D. R. Kaprekar cap a mitjans del segle passat. En el cas de nombres de quatre xifres, el forat negre que s'obté s'anomena la "**constant de Kaprekar**".

Conjectura de Collatz

14. Escriviu un nombre enter positiu. A continuació, genereu una successió de nombres començant amb el nombre que heu escrit i aplicant, successivament, la regla següent:



- Si es comença amb 7, per exemple, s'obtindrà la successió següent:

7 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1

Molta gent ha seguit aquest procés començant amb nombres diferents, i sembla que en tots els casos s'acaba arribant a 1 (o, més ben dit, s'acaba en el cicle 4, 2, 1).

Però ningú ha estat capaç de demostrar-ho i, per altra banda, tampoc ningú ha estat capaç de trobar un nombre inicial que no ens porti al nombre 1 aplicant aquest procés reiteradament.

El nombre 7 dona una successió de disset termes per arribar a 1. Hi ha nombres que donen successions realment llargues. Ho podeu veure provant els següents nombres com a inicials:

9 15 33 42 48 41 47 54

L'afirmació que tots els nombres acaben en 1 en aplicar-los aquest procés es coneix com la "**conjectura de Collatz**" o "**problema 3N+1**".

Probabilitats

Al capítol 101, en Christopher ens explica que un dia el senyor Jeavons li va dir que possiblement li agradaven les mates perquè eren segures. La qual cosa sembla que volia dir que, encara que els problemes que plantegen siguin enrevessats, al final sempre es poden resoldre amb una resposta directa.

1. Esteu d'acord amb l'afirmació del senyor Jeavons? Què li respondríeu?
2. De fet, hi ha problemes matemàtics per als quals han hagut de passar molts anys abans no s'hagin pogut resoldre. Sabríeu dir-ne algun?
3. I encara n'hi ha molts altres sense una resposta definitiva molt temps després d'haver-se plantejat. En coneixeu cap?
4. I, algunes vegades, una resposta perfectament convincent i definitiva consisteix a afirmar simplement que el problema no té solució. Tot i que per afirmar això poden haver calgut molts càlculs durant molt de temps. En coneixeu algun cas?

Per respondre les preguntes 2, 3 i 4 haureu de cercar informació. Podeu començar consultant aquesta pàgina de la Viquipèdia.

Les matemàtiques són una eina excel·lent per arribar a conclusions si partim d'unes dades concretes i coneixem els mecanismes amb els quals aquestes dades interaccionen i evolucionen. Aplicades a la física o a l'enginyeria, han aconseguit èxits indiscutibles: la construcció d'una infraestructura o la navegació espacial són el fruit de milions de càlculs en què s'apliquen sovint tècniques matemàtiques que semblaven només elucubracions teòriques quan es van descriure per primera vegada.

Però, d'entre la multitud de fenòmens que s'esdevenen a l'univers, sempre n'hi haurà alguns per als quals no podrem tenir accés a dades concretes per descriure'ls, o assegurar com aquestes dades poden evolucionar, en cas de tenir-les. Ens endinsem en el món de l'atzar. I aquí les matemàtiques han d'enfocar el problema d'una manera diferent.

5. Imaginem, per exemple, que llancem una moneda a l'aire. Creus que el fet que caigui d'un costat o un altre està determinat només per l'atzar?
6. Què enteneu per *atzar*? Tothom entén el mateix?
7. Si els nostres instruments de mesura i d'observació fossin molt perfectes, podríem assegurar el resultat de l'experiment? Justifiqueu la vostra opinió.

El que podem suposar, en principi, a falta de poder mesurar tots els processos físics que tenen lloc en llançar la moneda, és que, si aquesta no té cap defecte, no hi haurà res que determini una preferència entre caure d'un costat per sobre l'altre. Parlem, doncs, d'un fet equiprobable: tan probable és la cara com la creu.

Amb aquesta consideració, el raonament matemàtic ens pot ajudar a l'hora de prendre alguna decisió sobre un experiment relacionat amb aquest fet, com ara el llançament de diverses monedes diverses vegades. És el que se'n diu **càlcul de probabilitats**. Aquesta branca de les matemàtiques ens donarà els millors consells per actuar en qualsevol joc basat en l'atzar.

No ens podrà assegurar mai que guanyarem, però si seguim aquests consells és molt probable que a la llarga ens reportin benefici.

8. Les monedes es van inventar per facilitar l'economia d'intercanvi, tot i que aquí ens han servit per parlar de probabilitats. Però hi ha molts altres objectes que sí que s'han fet expressament per jugar amb l'atzar, com ara els daus. En sabríeu dir alguns més?

I, a banda dels objectes, el càlcul de probabilitats també s'aplica a situacions o processos que puguem suposar regits per l'atzar, com el lloc on serà la cabra en el problema de Monty Hall (en aquest mateix capítol 101 se'n parla), o el nombre de cotxes vermells seguits que veurà en Christopher de camí cap a l'escola. Totes aquestes situacions es poden quantificar d'alguna manera, cosa que ens permetrà avaluar el possible resultat o prendre la millor decisió.

9. Com us sembla que es podria avaluar la probabilitat que en Christopher veiés quatre cotxes vermells seguits? Quines dades hauríem de tenir?
10. Quina loteria o joc d'apostes públic creieu que pot ser un negoci favorable per al jugador? En quines circumstàncies? Compareu la vostra resposta amb la d'altres companys i companyes.

Portes, presos, daus i monedes

Al capítol 101, en Christopher ens explica el **problema de Monty Hall** i l'enrenou que va generar entre els lectors de la revista *Parade*, i també entre la comunitat matemàtica. Fins i tot un dels matemàtics més famosos del segle XX, Paul Erdös, va manifestar la seva desorientació en la solució del problema.

Al final del capítol es presenten dues resolucions. A la primera s'exposa "l'aplicació d'una fórmula" sense cap més explicació, i la segona, que és més clara, és una mena d'arbre de possibilitats.

Mirarem de donar altres explicacions per justificar que la probabilitat de guanyar el cotxe canviant de porta és $\frac{2}{3}$:

Anomenarem les portes com es fa al llibre: X, Y i Z.

Imaginem que el cotxe és darrere la porta X, però, evidentment, tu no ho saps, i has de començar escollint X, Y o Z a l'atzar:

- Si tries X, el presentador pot obrir Y o Z, però en qualsevol cas perds si canvies.
- Si tries Y, el presentador haurà d'obrir Z i guanyaràs el cotxe si canvies.
- Si tries Z, el presentador haurà d'obrir Y i guanyaràs el cotxe si canvies.

Per tant, en $\frac{2}{3}$ de les vegades és millor canviar.

Pot ser que la millor manera de veure-ho (i, tot i així, encara no es pot dir que ho sigui) consisteixi a imaginar-se que hi ha cent portes en lloc de només tres. Després que hagis triat una porta, el presentador obre les altres tret d'una (i tret de la que has triat).

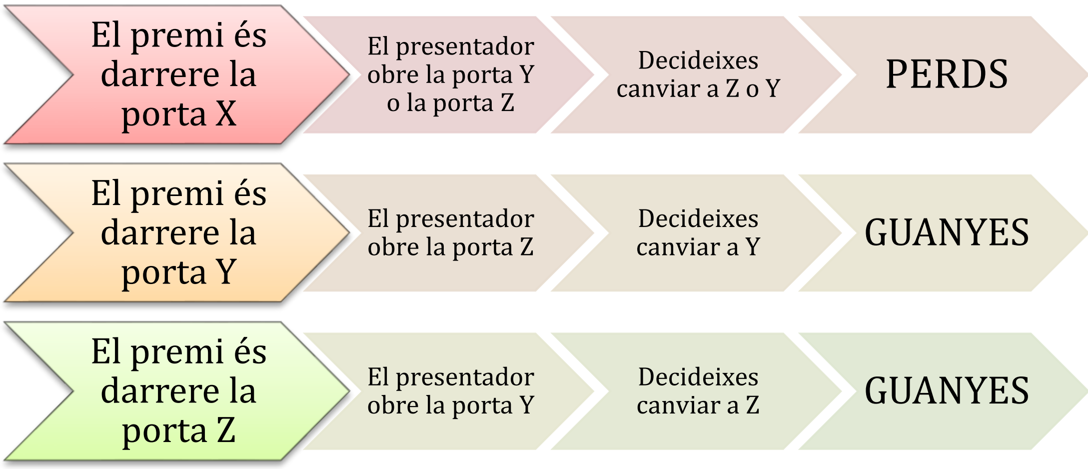
En el moment en què has triat una porta hi ha molt poca probabilitat que el cotxe sigui darrere ($\frac{1}{100}$) d'aquesta i molta probabilitat ($\frac{99}{100}$) que sigui darrere d'alguna de les altres. Si el presentador n'obre 98, la porta que queda (i no és la teva) segueix tenint aquesta alta probabilitat de tenir el cotxe darrere!

11. Et demanem que amb un company o companya dissenyeu un experiment per comprovar experimentalment el resultat teòric. Per exemple, podeu agafar tres vasos de plàstic de cap per avall per representar les portes i una boleta o un objecte petit per representar el cotxe.
    Jugueu-hi diverses vegades intercanviant els papers de presentador i concursant.

    - Amb quina freqüència guanya el concursant si aplica l'estratègia de no canviar de porta?
    - I si decideix canviar sempre?

Imatge: Alamy

12. Si tries la porta X, hi ha tres possibilitats on pot estar amagat el cotxe; i si decideixes canviar, hi haurà tres resultats possibles (espai mostral):



- A partir d'aquest espai mostral, mira de justificar l'explicació del llibre on s'aplica la fórmula.

El problema dels tres presos

Aquest problema té moltes semblances amb el problema de **Monty Hall**, com veurem més endavant, però també hi ha alguna diferència.

Hi ha tres presos en una cel·la. Saben que dos d'ells seran executats l'endemà al matí i un serà indultat, però no saben qui. Això ja està decidit i el guardià ho sap. Resulta que un dels presos és matemàtic i calcula la probabilitat que sobrevisqui, que és $\frac{1}{3}$.

A la tarda, que és la darrera tarda per a dos dels tres presos, quan arriba el guardià a la cel·la per portar-los el sopar, el nostre protagonista, el matemàtic, li diu al guardià: "Com que dos de nosaltres seran executats demà al matí, jo sé que almenys un dels altres dos presos serà executat. Per tant, no hi ha d'haver cap inconvenient que em diguis el nom d'un dels altres dos presos que serà executat. Després de tot, no t'estic preguntant res sobre el meu destí!"

El guardià reflexiona un moment i diu: "D'acord, t'ho diré. Ell serà executat", assenyalant un dels altres dos homes de la cel·la. "Perfecte!", diu el matemàtic. "Ara la meva probabilitat de sobreviure ha augmentat a $\frac{1}{2}$!"

És correcte el raonament del matemàtic?

13. Amb un company o companya, dissenyeu un experiment per representar aquest problema i, com en el cas anterior, trobeu la freqüència de vegades en què el matemàtic resulta indultat.

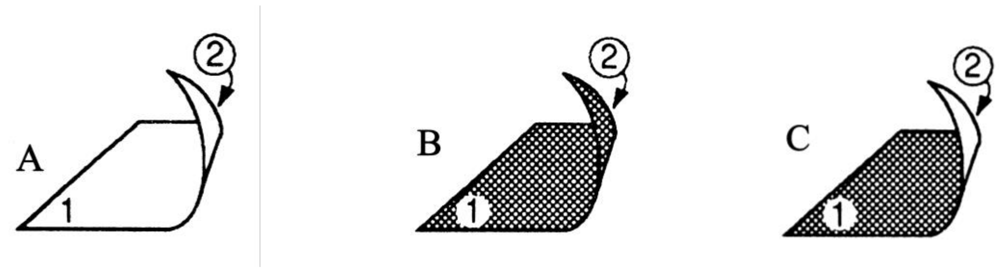
14. Mireu d'explicar el següent conjunt de resultats (espai mostral) i les probabilitats assignades (completeu les que falten):

	A indultat	B indultat	M indultat
El guardià diu A	0	$\frac{1}{3}$	
El guardià diu B	$\frac{1}{3}$	0	

Fixeu-vos que si ho comparem amb el problema de **Monty Hall**, el pres indultat no és altre que la porta que amaga el cotxe, però la diferència essencial entre els dos problemes és que aquí no hi ha intercanvi de portes/presos.

A continuació, es plantejaran alguns problemes d'atzar en els quals serà interessant dissenyar experiments com en els casos anteriors. També en altres casos caldrà ser acurats amb el conjunt de resultats (espai mostral).

El joc de les tres targetes



Hi ha tres targetes en una bossa. La primera (A) té el símbol X marcat als dos costats, la segona (B) té el símbol O escrit als dos costats, i la tercera (C) té X escrit en un costat i O a l'altre. Traiem una targeta a l'atzar de la bossa i n'examinem un costat, que resulta ser X. Quina és la probabilitat que també hi hagi X a l'altre costat?

Intuïtivament contestaríem que hi ha un 50 % de probabilitats, ja que teníem dues possibilitats per al símbol de l'altre costat.

15. Amb un company o companya, dissenyeu un experiment i trobeu la freqüència amb què apareix el símbol X després de repetir l'experiment diverses vegades.

16. Si us plantegéssim la juguesca següent: "Et pagaré 5 € si a la cara de sota hi ha el símbol O, i tu em donaràs 3 € si hi ha el símbol X", l'acceptaríeu?

La cursa d'obstacles

Jugueu-hi per parelles. Us caldran dos daus, dues monedes i el tauler de joc de la pàgina següent, que podeu enganxar en una base de cartró.

En cada etapa els jugadors han d'escollir un dels dos obstacles possibles.

Per superar un obstacle, seguiu les instruccions del requadre del tauler de joc.

Els jugadors podeu practicar. Feu alguns experiments perquè us ajudin a triar els obstacles més fàcils.

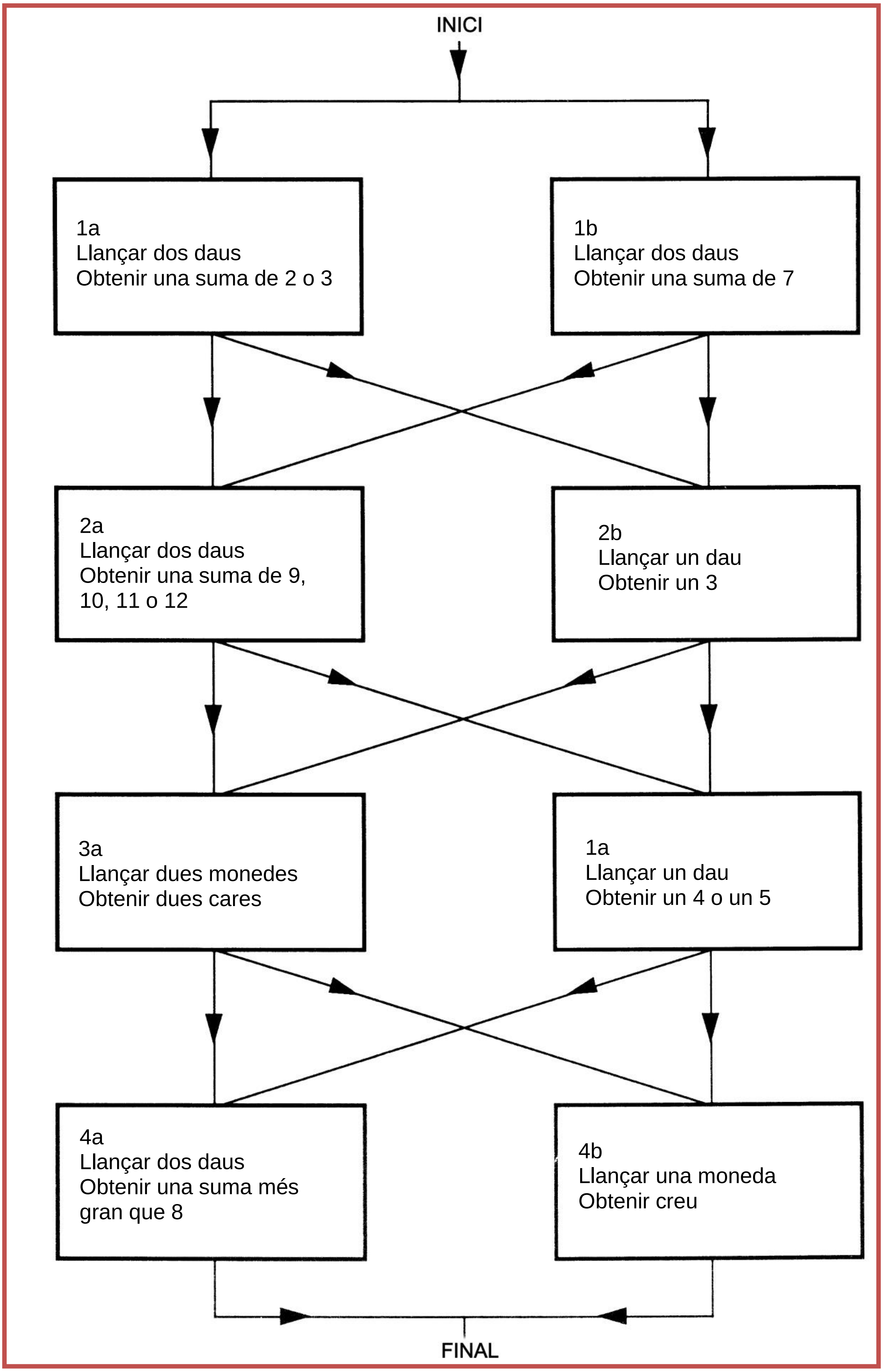
REGLES

- Cada jugador tria una ruta per a la cursa.
- Els jugadors, per torns, llancen els daus o les monedes d'acord amb les instruccions dels requadres.
- Els jugadors que compleixin les condicions poden passar a l'obstacle següent.
- Els jugadors que no compleixin les condicions han d'esperar el pròxim torn per tornar-ho a intentar.
- Guanya el primer jugador que arribi al "FINAL".

17. Quina és la millor ruta que podem triar per a la cursa? Justifiqueu la resposta.

18. Construïu altres curses d'obstacles i investigueu com funcionen: valoreu les probabilitats dels camins que hi pot haver, feu la cursa amb daus d'altres tipus...

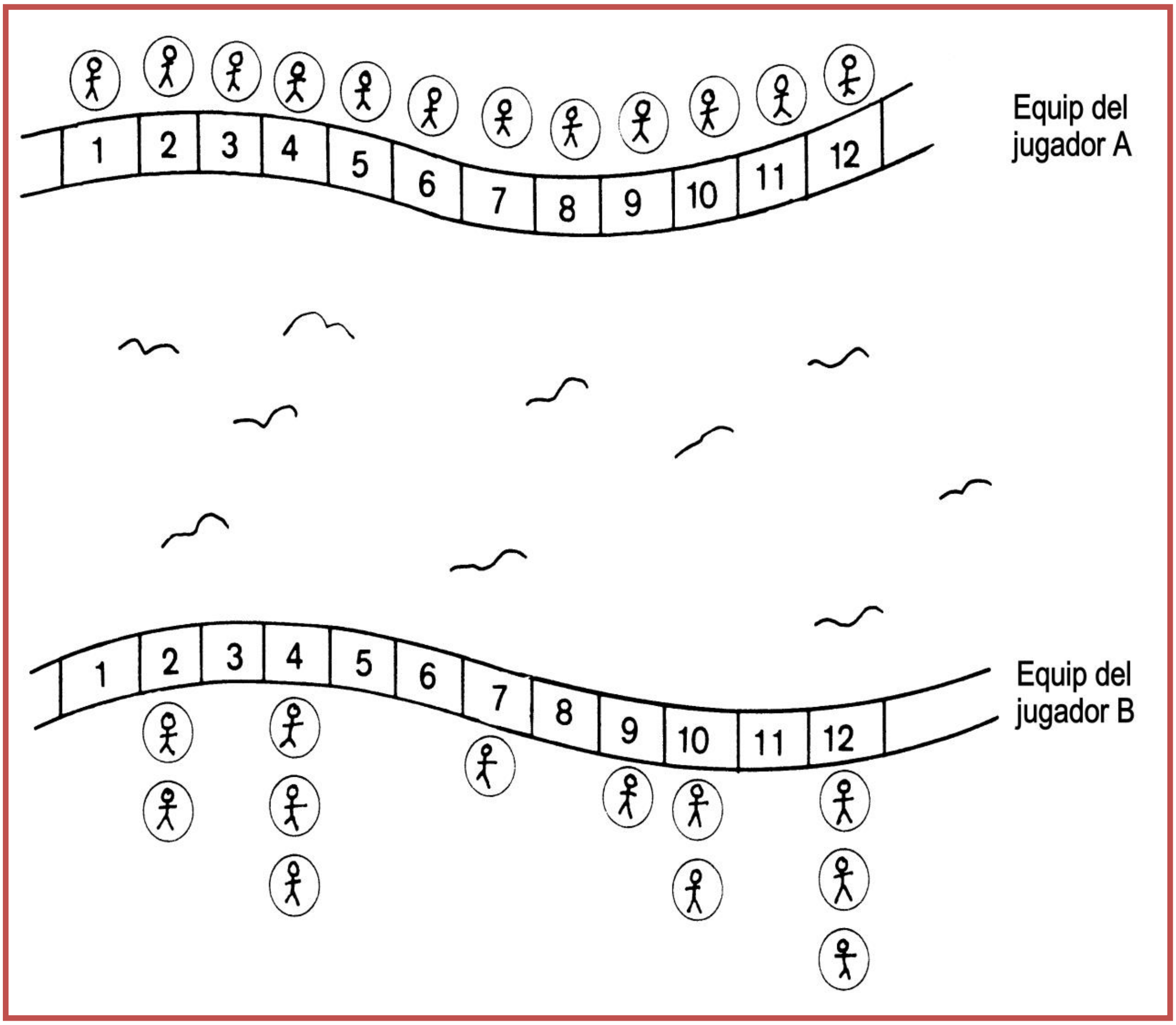
Cursa d'obstacles. Imatge: Ninja Kids


INICI
1a
Llançar dos daus
Obtenir una suma de 2 o 3
1b
Llançar dos daus
Obtenir una suma de 7
2a
Llançar dos daus
Obtenir una suma de 9, 10, 11 o 12
2b
Llançar un dau
Obtenir un 3
3a
Llançar dues monedes
Obtenir dues cares
1a
Llançar un dau
Obtenir un 4 o un 5
4a
Llançar dos daus
Obtenir una suma més gran que 8
4b
Llançar una moneda
Obtenir creu
FINAL

Passem el riu

Us proposem un altre joc per a dos jugadors. Cada jugador té dotze persones (podeu fer servir fitxes per a cada persona) que volen passar el riu. El jugador que fa travessar el riu tot el seu equip en primer lloc guanya.

Cada persona pot estar en qualsevol de les dotze posicions de la riba del riu. Per exemple:



19. Per torns, llanceu dos daus. La suma de punts mostra la posició des de la qual una persona pot travessar el riu. Jugueu al joc amb la vostra parella moltes vegades.

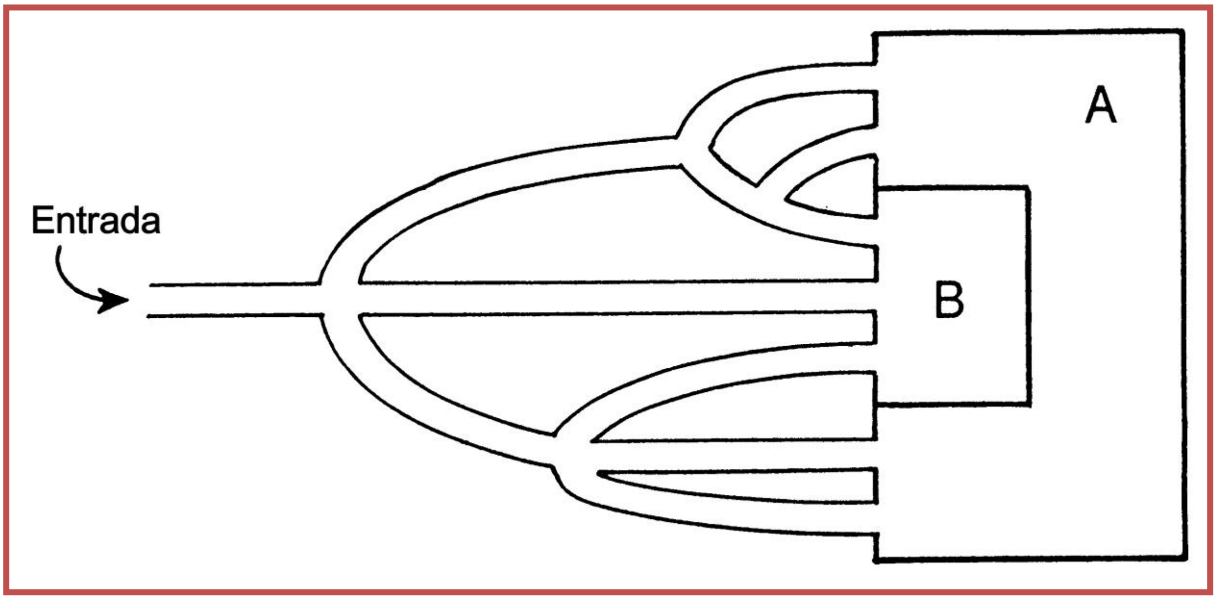
20. Mireu de trobar on caldria posar les persones de l'equip per tal que puguin travessar el riu al més ràpidament possible.

Rimbau i la princesa

Una vegada hi havia un rei. El rei tenia una formosa filla que volia casar amb un príncep d'un regne veí. Però, una mica abans de la data proposada per al casament, la princesa va conèixer Rimbau, un xicot ben plantat, intel·ligent i romàntic. Però Rimbau no era de llinatge noble, només era un pagès, i el seu amor va anar creixent en secret.

Inevitablement, el rei es va assabentar de la relació i, enutjat, va ordenar que Rimbau fos llençat a una sala plena de tigres. Però, en resposta a les súpliques de la seva filla, el rei va oferir una solució de compromís: Rimbau entraria en un laberint desconegut.

En cada intersecció hauria d'escollir el camí a seguir. Eventualment arribaria a una de dues sales: en una l'esperaven els tigres afamats, mentre que a l'altra l'esperava la princesa enamorada. Si Rimbau arribava a aquesta darrera sala, es podrien casar.



El rei va mostrar el mapa del laberint a la princesa, que era com el que es pot veure al dibuix, i li va dir que triés en quina sala volia esperar Rimbau.

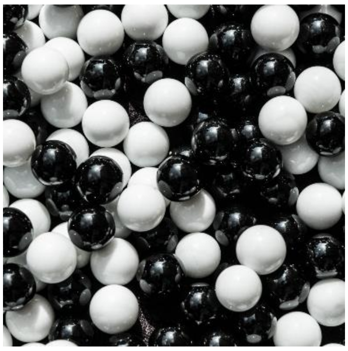
21. Recordeu que Rimbau no veu el mapa i que només pot decidir a l'atzar quin camí seguirà en cada intersecció. En quina sala aconsellaríeu a la princesa que s'esperi? Quines creieu que seran les probabilitats de Rimbau d'entrar a cadascuna de les dues sales A i B?

Boles, daus i monedes

22. Hem de repartir 100 boles negres i 100 boles blanques en dues bosses. Escollim una bossa a l'atzar i en traiem una bola.

    - Com distribuiríeu les boles entre les dues bosses per tal que la probabilitat de treure una bola blanca sigui al més gran possible?

Boles blanques bossa 1	Boles negres bossa 1	Boles blanques bossa 2	Boles negres bossa 2	Probabilitat bola blanca
50	50	50	50	...
100	0	0	100	...
30	70	70	30	...
30	30	70	70	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...



23. Tres daus cúbics (A, B i C) tenen les cares marcades amb els nombres següents:

    A: 2, 2, 4, 4, 9, 9

    B: 1, 1, 6, 6, 8, 8

    C: 3, 3, 5, 5, 7, 7

a) Si llancem A contra B (nombre més gran), quina és la probabilitat que guanyi A?

b) Si llancem B contra C, quina és la probabilitat que guanyi B?

c) I, finalment, si llancem C contra A, quina és la probabilitat que guanyi C?

d) Podeu explicar els resultats que heu obtingut?

24. Si llanceu sis monedes, quina és la probabilitat que exactament tres monedes mostrin cara?

a) La majoria de la gent diu que serà del 50 %. És correcte?

b) Observeu les pautes que apareixen quan llancem monedes. Escriviu els espais mostrals en cada cas i completeu la taula següent:

	Probabilitat d'obtenir exactament...						
Nombre de monedes	0 cares	1 cara	2 cares	3 cares	4 cares	5 cares	6 cares
1							
2							
3							
4							
5							
6							

c) Utilitzeu la pauta per fer una predicció de resultats quan es llancen sis monedes. Us sona aquesta pauta?

Imatges: [Amazon](), [Pixabay](), [OCDS]()

Algoritmes i dreceres

Al capítol 199, en Christopher reflexiona sobre el fenomen de la vida i la possible intervenció d'un Déu per explicar-la. Ell diu que la vida és el resultat del fet que es produeixin tres condicions.

1. Us sembla una bona definició de la vida?
2. De quines condicions parla?
3. Hi afegiríeu alguna altra condició?

També diu que és força difícil que es donin aquestes condicions i la vida comenci a funcionar. Però, en la història de la Terra, van passar milers de milions d'anys abans no va aparèixer cap traça de vida, o sigui que va haver-hi molt temps perquè passés una cosa que, vista des d'un moment donat, és molt difícil que passi.

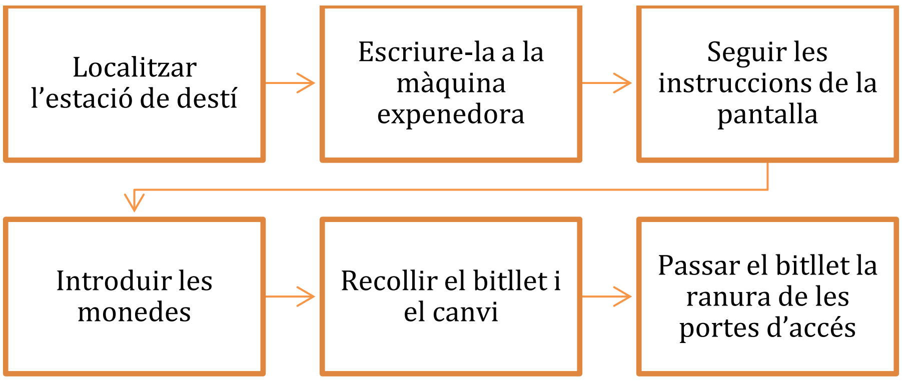
4. Creieu que el raonament és correcte? Quina altra explicació se us acudeix?

I, una vegada va sorgir la vida, i seguint les lleis de l'evolució, es va anar diversificant i especialitzant, amb l'aparició de noves espècies i l'extinció d'altres.

5. Sabeu com diu la ciència que funcionen les lleis de l'evolució?
6. Creieu que tot això es pot produir sense la intervenció d'un ésser superior omnipotent que ho dirigeixi i ho manegui tot?

En el capítol següent (211), com que no ha agafat mai el metro i el munt de gent que hi ha el neguiteja, en Christopher es refugia dins d'una cabina de fotos per poder observar què ha de fer exactament. Després d'observar els moviments de 47 persones, el noi memoritza els passos que fan per obtenir primer el bitllet i després accedir a l'andana.

Mentalment, doncs, ha confeccionat l'**algoritme** amb el qual ha d'obtenir el resultat esperat. Aquest algoritme passa per:



Si hi pensem una mica, gran part de les accions que fem en un dia qualsevol es poden contemplar des d'aquesta perspectiva algorítmica. Coses tan quotidianes com vestir-nos, cordar-nos les sabates, esmorzar, anar a l'escola, etc., les podríem descompondre en una sèrie d'accions consecutives que ens condueixen al nostre propòsit. Molt més clar apareix l'algoritme a l'hora de seguir una recepta de cuina o les instruccions de muntatge d'un moble: la clau de l'èxit depèn de seguir fidelment els passos correlatius que ens indiquen.

Els ordinadors són també un exemple paradigmàtic de la tècnica algorítmica: programes i subprogames amb milers d'instruccions correlatives en garanteixen el funcionament.

7. Podríeu posar exemples d'altres accions quotidianes que es puguin descriure com un algoritme? Proveu de descriure alguna d'aquestes accions com un seguit d'instruccions correlatives, com les que explicaríeu a algú que no conegués el procediment.

Quan fem una multiplicació estem seguint —de manera conscient quan l'aprenem i de manera automàtica quan el tenim per la mà— un algoritme similar al que controla un aparell informàtic per obtenir el mateix resultat. I cal saber també que l'algoritme que ens ensenyen a l'escola per multiplicar és només un dels possibles que ens poden conduir al resultat correcte. Diferents cultures tenen o han tingut diferents algoritmes per fer-ho. I també n'hi ha altres de més o menys enrevessats que han ideat persones amb un cert talent matemàtic.

8. Cerqueu a Internet algoritmes de multiplicar d'altres països, per exemple, la Xina i Rússia, i proveu d'aplicar-los en una multiplicació.
9. En aquesta pàgina trobareu tres algoritmes històrics per multiplicar. Observeu-los atentament, seleccioneu el que entengueu millor i expliqueu-ne el procediment a una altra persona de la classe.

Reculant una mica, al capítol 103 del llibre, en Rhodri, l'ajudant del pare d'en Christopher, planteja una multiplicació de dos nombres de tres xifres. L'algoritme normal que coneixem de la multiplicació és molt difícil de seguir mentalment per a una multiplicació d'aquesta envergadura, però el noi s'empesca una drecera que, amb concentració i habilitat mental, li proporciona la resposta correcta (que, naturalment, en Rhodri ignora). Perquè, més enllà dels algoritmes, que sempre funcionen, els nombres amaguen propietats que, en determinades condicions, ens permeten fer les operacions matemàtiques amb una rapidesa sorprenent.

Dreceres aritmètiques

Quan en Rhodri va demanar a en Christopher que calculés 251 x 864, en Christopher ho va resoldre de seguida emprant el que en podríem dir una "drecera aritmètica". En lloc de multiplicar 864 per 250, ho va multiplicar per 1000 i ho va dividir per 4 (que és relativament més fàcil) i, al resultat obtingut, 216.000, hi va sumar 864, de manera que va obtenir 216.864.

10. Intenteu seguir el mateix procediment que en Christopher per multiplicar 502 x 732. Compareu el resultat amb el d'altres companys i expliqueu com ho heu fet.

Hi ha dos aspectes de l'aritmètica que ens ajuden a fer els càlculs més senzills del que aparenten:

El primer és la manera com escrivim els nombres: si ho fem amb unitats, desenes, centenes..., ens és més fàcil imaginar-nos nombres grans. Per exemple, 87 és 8 desenes i 7 unitats en lloc de 87 unitats.

El segon són les "lleis de l'aritmètica" (commutativa, associativa, distributiva...).

Fent ús d'aquests dos aspectes:

a) Podem canviar l'ordre en què els termes estan sumats o restats i agrupar-los per tal de fer subtotals senzills:

$$127+371-128=371+(127-128)=\ldots\ldots$$

$$127+369+273=(127+273)+369=\ldots\ldots$$

b) Podem canviar l'ordre en què els factors estan multiplicats i agrupar-los per tal de fer productes senzills:

$$15\times 26=15\times(2\times 13)=(15\times 2)\times 13=\ldots\ldots$$

$$50\times 14=50\times(2\times 7)=(50\times 2)\times 7=\ldots\ldots$$

c) Podem simplificar factors per tal d'evitar multiplicar primer i després dividir pel mateix nombre:

$$(1234\div 6)\times 12=1234\times 2=\ldots\ldots$$

$$(7\times 12)\div 14=12\div 2=\ldots\ldots$$

$$(18\times 25)\div 15=(\ldots\ldots\times 3)\times(\ldots\ldots\times 5)\div(3\times 5)=\ldots\ldots$$

d) Podem multiplicar per 10 (o 100 o...) per canviar una multiplicació o una divisió que conté decimals a una que només contingui enters:

$$2{,}1\times 25=(\ldots\ldots\times 25)\div 10=\ldots\ldots$$

$$2{,}1\div 30=(\ldots\ldots\div 30)\div 10=(7\div 10)\div 10=\ldots\ldots$$

e) Podem fer agrupaments "intel·ligents". Tothom sap que 7 "vuits" i 3 "vuits" són el mateix que 10 "vuits":

$$(7\times 8)+(3\times 8)=(7+3)\times 8=10\times 8=80$$

$$(7\times(-8))+(3\times(-8))=(7+3)\times(-8)=10\times(-8)=-80$$

$$\left(7\times(-8)\right)-\left(3\times(-8)\right)=(7-3)\times(-8)=4\times(-8)=-32$$

$$\left(14\times(-7)\right)+\left(6\times(-7)\right)=........\times(-7)=........$$

f) Podem reagrupar els factors per fer les multiplicacions més senzilles:

$$28\times 25=(7\times 4)\times 25=7\times(4\times 25)=7\times........=........$$

$$25\times 5\times 9\times 2\times 4=(25\times 4)\times(5\times 2)\times 9=100\times 10\times........=........$$

g) Podem dividir un factor per 2 i multiplicar l'altre per 2 sense canviar el producte:

$$8\times 15=(8\div 2)\times(15\times 2)=$$

$$12\times 225=(12\div 2)\times(225\times 2)=(........\div 2)\times(......\times 2)=$$

$$8\times 1{,}5=(8\div 2)\times(1{,}5\times 2)=$$

$$88\times 0{,}125=44\times......=22\times......=11\times......=$$

h) En una divisió, podem multiplicar dividend i divisor per un mateix nombre sense que el resultat canviï:

$$3\div 0{,}5=(2\times 3)\div(2\times 0{,}5)=$$

$$18\div 25=(2\times 18)\div(2\times 25)=(2\times......)\div(2\times......)=$$

i) Podem fer “1 menys” o “1 més” que un multiplicador “fàcil”:

$$39\times 30=(40-1)\times 30=40\times 30-1\times 30=1200-......=......$$

j) També podem fer algunes divisions més fàcilment si separem el dividend en diverses parts:

$$128\div 8=(80+48)\div 8=80\div 8+48\div 8=......+6=$$

$$152\div 8=(160-48)\div 8=160\div 8-8\div 8=......-1=$$

11. Si ara teniu ganes de practicar totes aquestes “dreceres”, podeu mirar de fer els càlculs següents de la manera més eficient possible (òbviament, sense utilitzar calculadora i escrivint el mínim):

1) $37+96+63=$

2) $76+49-26=$

3) $302-29-271=$

4) $138-50+112=$

5) $25\times12=$

6) $22\times15=$

7) $15\times75\times40=$

8) $70\div14=$

9) $63\times11\div7=$

10) $81\times14\div18=$

11) $54\times20\div12=$

12) $1,2\times11=$

13) $10,8\div0,9=$

14) $(23\times18)+(7\times18)=$

15) $(6\times67)+(33\times6)=$

16) $(12\times14)+(6\times32)=$

17) $(22\times26)+(6\times13)=$

18) $9\times17+9\times(-8)=$

19) $34\times(-9)+17\times18=$

20) $16\times(-42)-(-42)\times6=$

21) $36\times25=$

22) $32\times500=$

23) $4\times13\times25\times2=$

24) $125\times11\times2\times4=$

25) $25\times180=$

26) $8\times125=$

27) $24\times0,25=$

28) $420\times1,5=$

29) $72\times1,125=$

30) $12\div2,5=$

31) $8\div0,5=$

32) $19\times13=$

33) $99\times83=$

34) $75\times41=$

35) $35\times202=$

36) $56\div4=$

37) $84\div7=$

38) $135\div3=$

39) $114\div6=$

40) $232\div8=$

Pautes a quadrats i productes

Quan multipliquem nombres, sovint apareixen pautes en els resultats. Aquestes pautes ens poden ajudar a predir productes i simplificar el procés de la multiplicació.

Un exemple en pot ser els resultats de quan elevem nombres acabats en 5 al quadrat. Mirarem de descobrir-ne la pauta:

$15^2 = 15 \times 15 = 225$ $25^2 = 25 \times 25 = 625$ $35^2 = 35 \times 35 = 1225$

$45^2 = 45 \times 45 = 2025$ $55^2 = 55 \times 55 = 3025$

12. Si us fixeu en les dues darreres xifres d'aquests quadrats, què observeu?

    - Ara fixeu-vos en la resta de xifres. Què observeu?

13. Amb el que heu trobat, mireu de predir els resultats dels quadrats següents i després comproveu els resultats amb la calculadora:

$65^2 = 65 \times 65 =$ $75^2 = 75 \times 75 =$ $85^2 = 85 \times 85 =$

$95^2 = 95 \times 95 =$ $105^2 = 105 \times 105 =$

- Podeu justificar algebraicament la vostra troballa?

Aquesta "drecera" per trobar quadrats de nombres acabats en 5 la podem estendre a productes en què la xifra o xifres de les desenes és la mateixa per als dos factors i les xifres de les unitats dels dos factors sumen 10, és a dir, en els casos:

16 x 14 = 224	27 x 23 = 621	48 x 42 = 2016	19 x 11 = 209	62 x 68 = 4216

14. Podeu explicar també aquí aquesta generalització algebraicament?

15. Escriviu els resultats dels productes següents directament:

$63 \times 67 =$ $92 \times 98 =$

$56 \times 54 =$ $84 \times 86 =$

$78 \times 72 =$ $43 \times 47 =$

$51 \times 59 =$ $71 \times 79 =$

$24 \times 26 =$ $34 \times 36 =$

Una altra pauta per calcular quadrats

16. Observeu aquesta pauta basada en quadrats. Podeu completar-la?

$2^2 = 3\times1+1$	$3^2 = 4\times2+1$	$4^2 = 5\times3+1$
$5^2 = 6\times4+1$	$6^2 =$	$7^2 =$
$8^2 =$	$9^2 =$	$10^2 =$

Com haureu vist, per fer 19^2 podem fer $19+1=20$ i $19-1=18$

$$19^2 = 20\times18+1 = 360+1 = 361$$

I per fer 21^2, podem fer $21+1=22$ i $21-1=20$

$$21^2 = 22\times20+1 = 440+1 = 441$$

17. Utilitzeu ara aquesta pauta per calcular els quadrats següents:

$29^2 =$	$31^2 =$	$39^2 =$	$41^2 =$

- Comproveu els resultats amb la calculadora. Podeu justificar aquesta pauta algebraicament?

Si apliquem aquest patró a un quadrat com ara 18^2, tindrem: $18^2 = 19\times17+1$, però ara no hi hem guanyat gaire, perquè el producte 19×17 porta tanta feina com el mateix quadrat.

Ara bé, podem generalitzar el nostre patró i calcular-ho així:

$$18^2 = 16\times20+4 = 320+4 = 324$$

I en el cas de $197^2 = 194\times200+9 = 38800+9 = 38.809$

18. Expliqueu com podem generalitzar el nostre patró i justifiqueu-ho algebraicament.
19. Apliqueu-ho per calcular:

$98^2 =$	$66^2 =$	$57^2 =$	$83^2 =$	$104^2 =$

Us haureu adonat que aquest patró està fonamentat en una de les identitats algebraiques que es coneixen com les “identitats notables”:

$$(x+a)\cdot(x-a) = x^2 - a^2$$

20. Aplicant aquest resultat, ara us proposem que calculeu amb el mínim de feina escrita i, si pot ser, escrivint el resultat directament:

a) $100003^2 - 99997^2$ b) $3'8^2 - 3'7^2$

c) $225^2 - 215^2$ d) $1234^2 - 1235^2$

e) $(1234567890)^2 - (1234567896) \times (1234567884)$

Una drecera per calcular arrels cúbiques

La taula següent de "cubs" i "arrels cúbiques" ens pot ajudar a calcular arrels cúbiques (només de cubs perfectes).

Arrel cúbica	Cub	Arrel cúbica	Cub
0	**0**	10	100**0**
1	**1**	11	133**1**
2	**8**	12	172**8**
3	2**7**	13	219**7**
4	6**4**	14	
5	12**5**	15	
6	21**6**	16	
7	34**3**	17	
8	51**2**	18	
9	72**9**	19	

21. Amb una calculadora, completeu la taula anterior i fixeu-vos en la darrera xifra. Escriviu totes les pautes que hi observeu.

Per trobar l'arrel cúbica de 1728:

Temptejant, podem veure que ha d'estar entre el 10 i el 20, perquè $10^3 = 1000$ i $20^3 = 8000$. Com que la darrera xifra és 8, amb les observacions anteriors podem deduir que és 12.

22. Practiqueu i calculeu les arrels cúbiques dels nombres següents:

3375	5832	6859	15.625
21.952	68.921	571.787	166.375

Caos

Al capítol 149, en Christopher es troba amb la primera pista d'un misteri que suposarà un gir en la narració: trobeu les cartes que li ha anat enviant la seva mare i que mai ha arribat a llegir perquè el pare les amagava. D'entrada només en pot agafar una, que el deixa ben desconcertat, ja que les coses que hi llegeix no tenen sentit d'acord amb la història que ell té com a certa sobre la seva mare. De moment, però, decideix que no té prou informació sobre l'assumpte i que el millor és no treure'n cap conclusió fins que no tingui les pistes necessàries per començar a deduir coses.

1. Creieu que és un raonament correcte o, si més no, prudent? Argumenteu la resposta. Com hauríeu actuat en el seu lloc?
2. Per què us sembla que la troballa de les cartes representa un gir transcendental en la narració? Com ho explicaríeu?

Com que ja hem llegit el llibre sabem que, de fet, la realitat s'aproxima als pitjors pronòstics que en Christopher podria extreure de la pista de la carta, però sembla que el seu caràcter especial el fa immune als prejudicis sobre fets que no tinguin una base sòlida i demostrable. En canvi, passa sovint que les persones o els grups humans es mouen per prejudicis envers altres persones o col·lectius i no es prenen la molèstia de contrastar les dades reals amb els fets o comportaments que se'ls imputen.

3. Podríeu citar-ne alguns casos?
4. Penseu que pot haver-hi algú interessat a promoure aquesta línia de pensament elemental i poc científica? Quins motius pot o poden tenir?
5. Les *fake news* o notícies falses es fan virals aprofitant que molta gent no es preocupa de contrastar la informació. Els canals preferits per fer-les circular solen ser les xarxes socials, tot i que també en podem trobar als mitjans de comunicació tradicionals.
   - Llegiu aquests consells de l'eduCAC per detectar notícies falses i feu-ne un decàleg per penjar a classe.

En tot cas, com continua raonant en Christopher al següent capítol, la ciència i l'observació són el millor remei per posar llum als misteris i combatre els prejudicis. Inclús per aportar una visió sobre fenòmens aparentment caòtics, com ara la població de granotes a la bassa de l'escola o el temps que farà.

6. Us sembla que les previsions del temps que fan els meteoròlegs són fiables? Esbrineu en què es basen per fer-les.
7. Les teniu en compte a l'hora de decidir si feu o deixeu de fer alguna activitat a l'aire lliure? I la vostra família?
8. Heu sentit a parlat mai de l'"efecte papallona"? Mireu-vos aquest vídeo del programa *Quèquicom* per saber en què consisteix, expliqueu-lo per parelles amb les vostres paraules i, a continuació, comenteu què pot tenir a veure l'efecte papallona amb el que en Christopher explica al capítol.

Seguint els passos que fa en Christopher analitzant la població de la bassa de granotes, ara farem una petita incursió en el caos i la incertesa que semblen dominar molts fenòmens físics i biològics i experimentarem una mica amb les causes que els provoquen.

Granotes i papallones: cap al caos

But for a nail the shoe was lost,

But for a shoe the horse was lost,

But for a horse the soldier was lost,

But for a soldier the war was lost,

But for a war the kingdom was lost.

But for a nail the kingdom was lost.

Atribuït a: Benjamin Franklin (1758)

Una part important de les matemàtiques té a veure amb el fet de modelar situacions de la vida real. Això vol dir que intentem trobar equacions que descriguin els esdeveniments de la vida real i, després, utilitzar aquestes equacions per predir el que passarà en el futur. Si el model és bo, obtindrem un pronòstic acurat del futur.

Al capítol 151, en Christopher ens descriu un model per calcular el nombre de granotes que hi ha en una bassa a l'escola, i també ens mostra una gràfica on es pot veure el nombre de granotes que hi ha a la bassa al llarg d'una sèrie d'anys. Aquesta gràfica mostra unes variacions que, com indica en Christopher, són un misteri!

Un camp d'estudi de l'ecologia és el de l'evolució de poblacions, siguin granotes, conills o éssers humans. Mirem de trobar una equació que modeli la manera com creix una població.

Primera temptativa: suposem que en un cert moment tenim una població P_A en què el subíndex A significa 'antiga' o 'original'. Suposem també que la població creix a raó d'un 10 % anual. Aleshores, després d'un any, la població nova P_N serà:

$$P_N = P_A + \frac{10}{100} P_A = P_A\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1{,}1 \cdot P_A$$

Per tant, és clar que, en general, tindrem $P_N = r \cdot P_A$, on r és alguna constant no negativa.

Si en lloc dels subíndexs A i N per a les poblacions antiga i nova escrivim P_n per a la població a l'any n, la fórmula s'escriurà $P_1 = r \cdot P_0$.

9. Expliqueu per què la fórmula que dona la població al cap de n anys en termes de la població original ($n=0$) és $P_n = P_0 \cdot r^n$.
   - Creieu que és prou bo aquest model? Per què?

Per a poblacions petites probablement sí que sigui bo, però observem que en un període d'anys prou llarg la població esdevindrà molt i molt gran. Està clar que una població no pot augmentar indefinidament, perquè exhauriria l'espai i els aliments o totes dues coses. Per tant, ens cal modificar la nostra equació.

Segona temptativa: tornem a la població de granotes a la bassa i suposem que L és la població més gran que la bassa pot suportar. Això ens suggereix que podríem incloure un factor ($L - P_A$) a l'equació. Factor que es farà petit quan P_A s'aproximi a L i, per tant, farà disminuir la predicció per a la nova població P_N i, així, tindrem una nova equació: $P_N = r \cdot P_A \left(L - P_A\right)$.

És habitual "normalitzar" aquesta equació prenent $L = 1$. Per exemple, si la població màxima és 100, podem acordar mesurar la població en "centenars". Així, posant la nova variable n per al nombre d'anys, tindrem la nova equació anomenada, "equació logística":

$$P_{n+1} = r \cdot P_n \cdot \left(1 - P_n\right) \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Observeu que estem suposant que la població està entre 0 i 1.

10. Expliqueu per què el terme $P_n \cdot \left(1 - P_n\right)$ està entre 0 i 1/4 i el valor més gran correspon a $P_n = \frac{1}{2}$.
    - Quins valors ha de prendre r per tal d'assegurar que $0 \leq P_{n+1} \leq 1$?

Per tant, si sabem la població P_n de l'any n, llavors l'equació ens predirà la població P_{n+1} l'any següent. La nostra equació és, per tant, de la forma $y = r \cdot x \cdot \left(1 - x\right)$, una equació de segon grau amb una gràfica que, com saps, és una paràbola invertida.

El que afegeix interès a l'equació és que l'anirem **iterant**: començant amb P_0, determinarem P_1 i, en introduir una altra vegada aquest valor a l'equació, trobarem P_2, i així successivament. Per tant, obtindrem una successió de valors de població P_0, P_1, P_2, P_3, ... (òrbita de P_0) que prediuen la població en anys successius.

La pregunta interessant ve ara: com es comporta aquesta successió? Quan n es faci gran, els termes creixeran indefinidament? Aniran cap a zero (la població s'extingeix) o s'aproparan a algun altre valor constant?

Per tal de seguir aquesta investigació, com que fer càlculs a mà o amb calculadora pot ser una feina feixuga i que requereixi molt temps, aquest enllaç de GeoGebra us donarà la gràfica de la població al llarg dels anys i podreu variar la població original, el valor de la constant r, P_0 (aquí x_0) i el nombre d'iteracions n (anys).

11. Estudieu i observeu la variació de la població per als valors següents de r:

$r = 2$ $\quad$ $r = 3$ $\quad$ $r = 3,2$ $\quad$ $r = 3,5$ $\quad$ $r = 4$

12. Feu-ho variant les poblacions originals P_0 (x_0) i el nombre d'anys n.

- En aquest enllaç de GeoGebra podreu veure i comparar simultàniament tres gràfiques per a tres valors de la població inicial: 0,3 - 0,4 - 0,5.

Això pot resultar especialment interessant en el cas $r = 4$ (aquí r és k).

Com podeu intuir, tenim al davant un món fantàstic per explorar i fer conjectures, que té conseqüències pràctiques i que també ha estat descobert fa relativament poc (Feigenbaum hi treballava l'any 1975).

13. Tot seguit us plantegem algunes qüestions que podeu explorar amb els recursos informàtics.

a) En quin valor de r, diguem-li r_1, la població canvia d'un sol límit a una oscil·lació?

b) Hi ha algun valor de r per al qual la població oscil·la entre tres valors?

c) En quin valor de r, diguem-li r_2, la població canvia d'un cicle d'ordre 2 a un cicle d'ordre 4?

d) En quin valor de r, diguem-li r_3, la població canvia d'un cicle d'ordre 4 a un cicle d'ordre 8?

e) Observeu la successió de valors r_1, r_2, r_3, r_4, ... Creieu que tindran un límit? Quin pot ser?

f) Hi ha res d'especial pel que fa al valor $r = 2$? (Indicació: on és que la recta $y = x$ talla la paràbola?)

g) El valor $a = 3,5699.....$ és el **punt de Feigenbaum**: l'entrada al **caos**. Experimenteu què passa si aneu variant el valor de *r*.

14. Com a síntesi final, podem explorar el diagrama d'òrbites per a la funció logística en aquest enllaç de GeoGebra, on a l'eix horitzontal hi trobarem els valors finals de r i a l'eix vertical els valors finals (estables) de l'òrbita.

El caos que exhibeix l'equació logística és un fenomen fantàstic per fer gabiejar els matemàtics. Però, hi ha alguna cosa més?

La característica que defineix el caos matemàtic és la seva "sensitivitat a les condicions inicials". Fins i tot l'alteració més petita de la situació inicial pot causar a llarg termini un comportament de la successió totalment diferent de l'esperat. Aquest fet es coneix pràcticament com l'**efecte papallona**.

Les equacions que governen el nostre temps atmosfèric són caòtiques, igual que la nostra equació logística. Per tant, un petitíssim canvi en les condicions atmosfèriques, com ara el causat per una papallona que bat les ales en una banda del món, pot canviar totalment el resultat eventual del temps a l'altra banda del món anys més tard. Per exemple, potencialment pot causar la diferència entre que es formi un tornado o no. Aquest fenomen és el que fa que els homes i dones del temps siguin, a vegades, tan impopulars: la previsió del temps a llarg termini és impossible de fer amb precisió.

El descobriment de Lorentz

Així, no és estrany que el caos matemàtic fos un descobriment accidental d'un home del temps. Un meteoròleg del MIT, Edward N. Lorentz, a la dècada dels seixanta, estava assajant models matemàtics per a la predicció del temps utilitzant els ordinadors primitius d'aquella època.

Primer va descriure el temps recopilant una sèrie de dades numèriques. Introduint aquestes dades en el seu model, va generar una nova llista de nombres que predeien el temps per al període següent. Aleshores, aquests valors es tornaven a introduir en les seves fórmules matemàtiques per produir valors similars per al període de temps següent, i així successivament.

Un dia particularment afortunat, Lorentz estava fent funcionar el seu model generant les prediccions del temps atmosfèric i, per alguna raó, va haver d'interrompre la seva tasca. Per tant, hauria de tornar a entrar tots els valors previs i recomençar el procés després de diverses repeticions que ja havia completat.

En lloc de teclejar totes les xifres d'aquells nombres, va decidir d'estalviar una mica d'esforç arrodonint els nombres, pensant que això probablement no implicaria cap gran diferència si ignorava el sisè o el setè decimal després de la coma decimal.

Però en fer funcionar el seu model va descobrir, amb gran sorpresa, que arrodonint aquells valors resultaven unes prediccions del temps radicalment diferents! Lorentz es va adonar que el seu sistema de predir el temps era, de fet, un exemple d'un nou descobriment matemàtic. Sense buscar-ho, va esdevenir el pare de la teoria del caos.

Imaginem que fem un experiment per investigar l'efecte papallona de Lorentz amb una versió molt simplificada i que utilitza uns ordinadors molt primitius i obsolets. Ho farem iterant la regla $x \to 4x(1-x)$. El primer ordinador és tan dolent que només pot retenir un lloc decimal. El segon, tot i que és una mica millor, només pot retenir dos llocs decimals de precisió. En cada cas calcularem l'òrbita de 0,1.

En el primer cas trobem:

$$x_0 = 0{,}1$$

$$x_1 = 4 \cdot 0{,}1 \cdot (1 - 0{,}1) = 0{,}36 \approx 0{,}4$$

$$x_2 = 4 \cdot 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}4) = 0{,}96 \approx 1{,}0$$

$$x_3 = 4 \cdot 1{,}0 \cdot (1 - 1{,}0) = 0$$

I com que 0 és un punt fix, després de tres iteracions amb aquest ordinador l'òrbita queda fixada.

Amb l'altre ordinador tindrem:

$$x_0 = 0{,}1$$

$$x_1 = 4 \cdot 0{,}1 \cdot (1 - 0{,}1) = 0{,}36$$

$$x_2 = 4 \cdot 0{,}36 \cdot (1 - 0{,}36) = 0{,}9216 \approx 0{,}92$$

$$x_3 = 4 \cdot 0{,}92 \cdot (1 - 0{,}92) = 0{,}2944 \approx 0{,}29$$

$$x_4 = 4 \cdot 0{,}29 \cdot (1 - 0{,}29) = 0{,}8236 \approx 0{,}82$$

$$x_5 = 4 \cdot 0{,}82 \cdot (1 - 0{,}82) = 0{,}5904 \approx 0{,}59$$

Òbviament, aquests dos ordinadors produeixen resultats diferents. Segur que el vostre ordinador és millor, però no gaire més. Pot ser que retingui vuit llocs decimals, o potser setze. Tot i així, l'ordinador continua fent errors d'arrodoniment; per tant, el fenomen que vèiem amb els ordinadors obsolets encara es manté.

15. Ara us proposem de fer l'experiment amb els mitjans que pugueu tenir a l'abast. Es pot fer, per exemple, amb la regla $x \to x^2 - 2$, que, si s'utilitza la calculadora, serà fàcil d'iterar; només caldrà anar prement la tecla d'elevar al quadrat (x^2), el signe menys ($-$) i el nombre 2 (2).

Ho fareu seguint tres passos:

I. Aquest primer pas el fareu creant un full de càlcul. Primer veiem què passa si comencem amb un decimal com ara 0,5. Poseu el 0,5 a dalt d'una columna, per exemple, a la cel·la A1. A la cel·la següent, l'A2, entreu-hi la fórmula "=A1*A1-2"; el full de càlcul escriurà automàticament en aquesta cel·la el resultat de la fórmula (-1,75). Ara activeu la cel·la A2 i arrossegueu el punt negre que hi ha a l'extrem inferior dret d'aquesta casella cap avall, i la columna s'anirà omplint automàticament amb les iteracions successives.

   Veureu "caos" en aquesta columna de nombres, però encara pot ser més caòtic del que sembla. Per veure-ho, podeu fer el mateix procés a la columna B, però ara amb un nombre que és molt a prop de 0,5, com per exemple 0,50001. Aquí apareixeran uns valors escandalosament diferents de la primera columna. Així, una diferència insignificant en els valors inicials dona, de manera molt ràpida, uns resultats totalment diferents.

II. A continuació, imitant Lorentz i seguint la mateixa regla d'abans, us proposem que ompliu la columna A amb el valor 0,5 i, després, que ho feu també amb la columna B. Evidentment, obtindreu resultats (columnes) idèntics.

III. Però ara us demanem una cosa una mica estranya. Torneu a teclejar totes les xifres de la cel·la B12 exactament per començar el que encara veieu a la cel·la A12 i apareixerà una nova sorpresa: tot i que les dues columnes són gairebé iguals al principi, aviat esdevindran dramàticament diferents.

   - Podeu explicar aquests resultats?
   - Quina columna creieu que és més correcta?

Si no teniu pràctica amb fulls de càlcul, podeu fer-ho amb la calculadora, però, en aquest cas, s'haurà de fer en grup, ja que la feina és molt feixuga...

Retrat d'E. N. Lorenz (Imatge: Flickr)

Doblar dosos

Més o menys cap a la meitat del llibre, entre els capítols 157 i 167, la narració arriba al seu clímax, quan en Christopher s'assabenta de dues coses transcendentals: que la seva mare és viva i que el seu pare és el responsable de la mort del gos.

Entremig d'aquests dos capítols d'acció, i seguint l'esquema més o menys normal del llibre, que intercala acció i reflexió, el capítol 163 conté uns pensaments força profunds sobre la ment humana i les possibles semblances i diferències amb la "ment" d'un ordinador.

1. Creieu que les reflexions que fa en Christopher són correctes? Quin contraargument li podríeu oposar?
2. La ment humana sempre és clarament superior a un ordinador? O, potser, clarament inferior? En què baseu la vostra opinió?

És clar que una cosa és parlar de la nostra ment personal, la que ens proporciona la consciència i, amb l'ajut dels sentits, tota l'experiència del món, i una altra de diferent és parlar de la ment d'una altra persona, la qual podem mirar des de fora i, d'alguna manera, analitzar-ne el comportament i les reaccions, com ho podríem fer amb un ordinador.

3. Creieu que sempre seria possible, si no podem saber amb qui estem parlant, deduir clarament si és amb una persona o amb un programa d'intel·ligència artificial?

La intel·ligència artificial és un tema candent i que mou força polèmica ara mateix.

4. La veieu com una tecnologia positiva?
5. Quins problemes o efectes no desitjables creieu que podria causar?
6. Creieu que caldria regular-la? De quina manera? Ho veieu possible?

Una de les maneres que té en Christopher per alleujar les crisis d'angoixa que l'assetgen a causa de les trepidants circumstàncies d'aquests capítols és pensar en els números i calcular mentalment algunes operacions recurrents amb ells. En el capítol 167 recorre en un parell de situacions al joc de doblar dosos. L'estat d'excitació al qual està sotmès sembla que li fa minvar una mica la capacitat intel·lectual. Una vegada, aconsegueix arribar fins a la vint-i-cinquena potència de dos, i una altra, només fins a la quinzena, malgrat que afirma que alguna vegada havia arribat fins a la quaranta-cinquena.

7. Heu provat mai de fer càlculs mentals d'aquesta mena? Fins a on creieu que podríeu arribar? Intenteu-ho. Podeu fer un rànquing de qui arriba més enllà.

Poc més endavant, al capítol 179, per evitar gemegar, fa cinquanta inspiracions, comptant mentalment els números i elevant-los al cub.

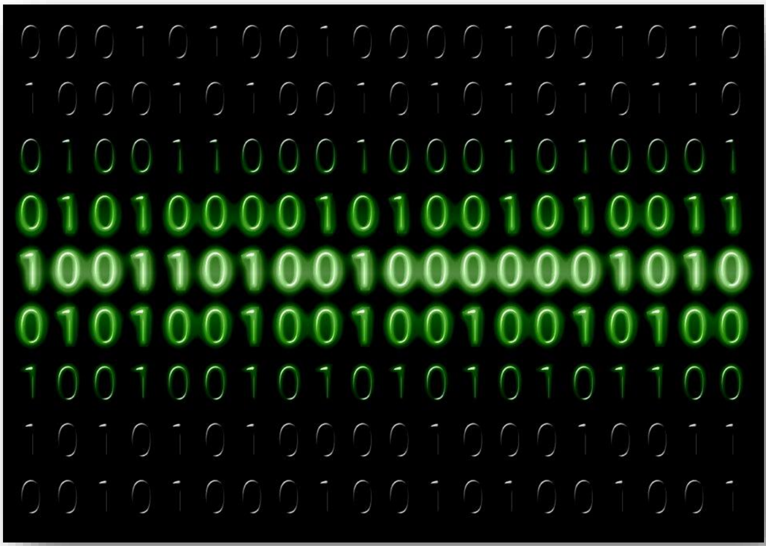
8. Creieu que entre aquests cinquanta cubs que calcula hi ha algun resultat que coincideixi amb algun dels nombres que havia calculat abans quan doblava dosos? Podeu justificar-ho?

9. Quina particularitat haurien de tenir la potència de dos i el nombre que s'eleva al cub perquè es doni aquesta coincidència?

Les potències de dos formen part dels fonaments de l'emmagatzematge i transmissió digital de la informació que es basen en el **bit**, la unitat mínima d'informació, capaç d'oscil·lar entre dos estats. Per exemple, amb un bit de sortida d'informació puc respondre SÍ o NO al que em preguntin. Si en tinc dos, i formo part d'un sistema d'informació meteorològica elemental, a la pregunta sobre quin temps fa ja puc respondre sobre quatre estats, per exemple: serè, núvol, pluja o neu.

10. Quines possibilitats d'informació diferents us sembla que podem oferir cada vegada que afegim un bit al nostre sistema?

Les potències de dos apareixen també espontàniament en una gran varietat de situacions o jocs quan els analitzem en llenguatge matemàtic. I sovint ens poden conduir cap a resultats sorprenents o altament paradoxals…



Bits. Imatge: Creazilla

Problemes de potències de 2

Torre de paper

Suposeu que teniu un tros gran de paper, d'una mil·lèsima de centímetre de gruix, és a dir, que 1000 d'aquests papers, l'un a sobre de l'altre, fan 1 cm.

11. Imagineu que partiu per la meitat aquest paper i poseu els dos trossos l'un a sobre de l'altre. Torneu a partir-los per la meitat i poseu els quatre trossos que en resulten en una mateixa pila.

Continueu el procés partint cada vegada la pila per la meitat.

Suposeu que ho repetiu 50 vegades. Quina alçada tindrà la pila resultant? Ho podeu endevinar completant la taula següent per descobrir la pauta.

Nombre de particions	1	2	3	4	5	6	50
Nombre de peces	2	4	8				

Pista: Escriviu els nombres de la segona columna com a potències de 2.

Consell: Feu servir una calculadora científica per expressar la resposta en metres o quilòmetres.

Cadena de cartes

Un dia la Maria va trobar aquesta carta a la bústia:

Benvolguda Maria,

Avui és el teu dia de la sort! Si segueixes les instruccions d'aquesta carta, rebràs molts diners per correu!

Això és el què has de fer:
Primer, envia 1 € a la primera persona de la llista que tens aquí sota. Esborra el seu nom i desplaça els altres un lloc cap amunt, afegint el teu nom en darrer lloc. Després, fes 20 còpies d'aquesta nova carta i envia-la a 20 dels teus millors amics.

1. *Pere Munts*
2. *Carme Sau*
3. *Roser Puig*
4. *Joan Costa*

Anima't i no trenquis la cadena, i no diguis res d'això al Servei de Correus... és il·legal!

12. Quants diners obtindria la Maria si no es trenqués la cadena?

a) Aquesta oportunitat sembla massa bona per ser veritat, però ho és. Per què?

b) Completeu la taula següent per trobar quanta gent caldria per mantenir la carta només vuit cicles. Què us sembla si ho compareu amb la població mundial actual, que és aproximadament de 8000 milions de persones?

Número de cicle	Nombre de persones que calen per al cicle	Nombre total de persones implicades des del principi
1	20	20
2	400	420
3	8000	8420
4		
5		
6		
7		
8		

Antecessors

Com la majoria de les persones, jo tinc 2 pares, 4 avis, 8 besavis, i així successivament.

13. Si compto els pares com una generació anterior, els avis com a dues generacions anteriors, etc., aleshores quants antecessors tinc 20 generacions enrere?

a) Comptant un "interval generacional mitjà" de 25 anys, en quina època seria?

b) I si ho comptem en 30 generacions enrere?

c) I en 33 generacions enrere?

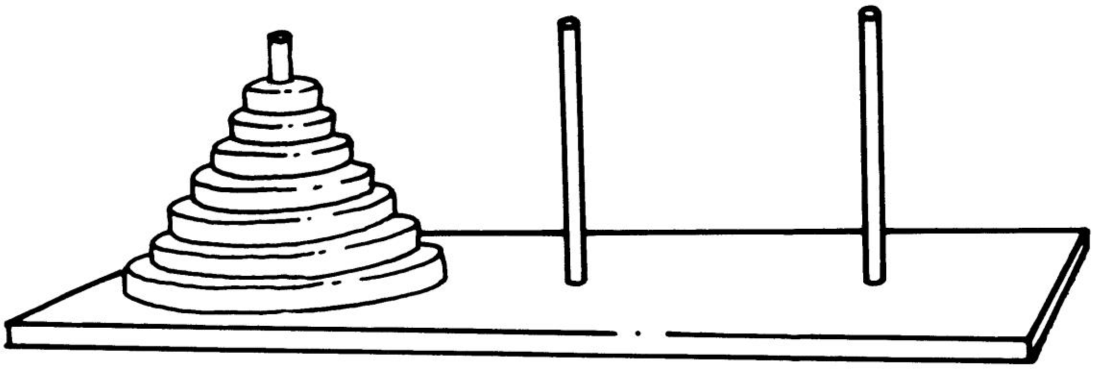
Es calcula que fa 1000 anys només hi havia, en total, uns 300 milions de persones al món. Si tothom "descendeix d'Adam i Eva", aleshores haurem de compartir molts antecessors llunyans!

La torre de Hanoi i la fi del món

D'acord amb una antiga llegenda hindú, Brahma va posar 64 discs d'or, un sobre l'altre, a la torre de Brahma (de vegades anomenada "torre de Hanoi"). Els discs, tots de diferent mida, estaven posats per ordre amb el més gran a sota i el més petit a dalt de tot.

Als sacerdots se'ls va encarregar la tasca de transferir els discs d'una pila a una altra (utilitzant una tercera pila, si calia), de manera que en cap etapa hi podia haver un disc més gran situat damunt d'un de més petit.

La llegenda explica que un cop completada la tasca el món s'acabaria.



14. Quants moviments caldria fer per transferir els 64 discs? (Es considera un moviment l'acció de canviar de posició un sol disc.)

    Per investigar aquest problema, es pot fer un model amb monedes o altres objectes de diferent mida i començar amb casos més senzills (amb pocs discs) i anar emplenant la taula següent per tal de veure algun patró.

Nombre de discs	1	2	3	4	5	64	n
Nombre mínim de moviments	1						

- Si cada vegada que movem un disc (moviment) tardem un segon, quants anys caldrien per moure els 64 discs d'un pol a l'altre?

Balances i pesos

Un comerciant, que també és matemàtic, té una balança de braços (equilibri) i té un conjunt infinit de pesos calibrats amb valors enters: p_0, p_1, p_2, ... (on $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$), però només en té un de cada valor.

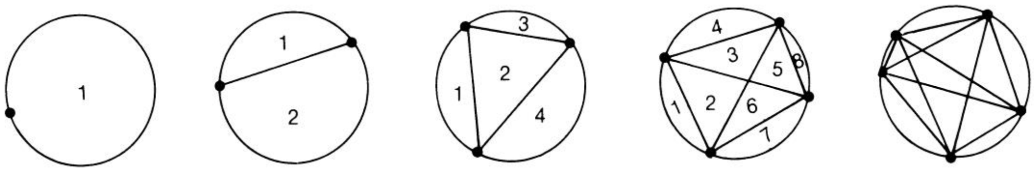
15. Suposem que per a cada objecte de pes p (nombre enter) que s'ha de pesar, quan es col·loca en un dels plats de la balança, el comerciant pot seleccionar una combinació dels seus pesos p_0, p_1, p_2, ... per col·locar a l'altre plat per equilibrar i, per tant, determinar el pes de l'objecte.

    a) Si per cada pes p hi ha una sola elecció dels pesos p_i que equilibren p, expliqueu per què la col·lecció de pesos ha d'estar formada per totes les potències de 2.

    b) Si el conjunt de pesos del comerciant li permeten equilibrar cada pes (enter) p que hagi de determinar de manera única, però ara podent col·locar els "seus pesos" en qualsevol dels dos plats de la balança, què en podem dir ara del conjunt de pesos?

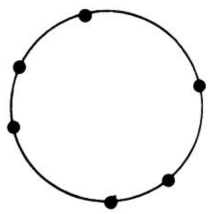
La regió perduda

Si disposem 10 punts sobre una circumferència de manera que els segments que connecten (uneixen) tots els punts formin el nombre màxim de regions, quantes regions es formarien?



16. Estudiant casos més simples (amb menys punts) podem omplir la taula següent per observar si hi veiem un patró.

Nombre de punts	1	2	3	5
Nombre màxim de regions	1	2	4	



a) Feu una predicció per al nombre màxim de regions si hi ha 6 punts.
   - Comproveu la vostra predicció amb un dibuix i comptant les regions.
   - És correcta?

b) Podeu fer una nova predicció? Les diferències successives dels valors us poden ajudar.

Suma de nombres consecutius

El nombre 7 és suma de nombres naturals consecutius (7 = 3 + 4), com també ho és el nombre 10 (10 = 1 + 2 + 3 + 4).

17. Tenint això en compte:

a) Expliqueu per què 8 **no** és la suma de nombres naturals consecutius.

b) El nombre 29 és la suma de dos nombres naturals consecutius?

c) Esbrineu quins nombres són la suma de dos nombres naturals consecutius. Busqueu algun patró.

d) Busqueu patrons per predir quins nombres són la suma de:

   - Tres nombres naturals consecutius
   - Quatre nombres naturals consecutius
   - Cinc nombres naturals consecutius
   - Sis nombres naturals consecutius

e) Considerant els resultats que heu obtingut als apartats b) i c), trobeu una regla senzilla per predir quins nombres naturals són o no són la suma de nombres naturals consecutius.

f) Comproveu-ho per veure si cadascun dels nombres següents és suma de nombres naturals consecutius o no ho és:

127 128 254 256 1024

Els cavallers de la Taula Rodona

Fa molt de temps hi havia un rei que tenia una taula rodona.

Aquest rei volia casar la seva filla, i va inventar una manera original de decidir amb quin dels seus cavallers es casaria. Va convidar els cavallers a sopar i els va fer seure a la taula rodona.

Després de sopar, el rei va treure la seva espasa i, passant de llarg el cavaller que seia immediatament a la seva esquerra, va tallar el cap del cavaller que hi havia a continuació.

Aleshores va continuar el camí al voltant de la taula, tallant el cap de cada segon cavaller. I va seguir aquest procediment fins que només va quedar un cavaller. Aquest va ser el cavaller que va sobreviure per casar-se amb la filla del rei.

18. Si hi havia 100 cavallers convidats, quin era el millor lloc per seure per no ser decapitat?

Com en problemes anteriors, és convenient observar casos en què el nombre de cavallers és petit i veure si hi ha algun patró per triar el millor seient.

Els Cavallers de la Taula Rodona. Imatge: [Wikimedia Commons]

Conway

Al capítol 191, en Christopher ja ha aconseguit arribar a l'estació de Swindon, que pot comprovar que és força diferent de l'estació del seu tren de joguina. Les estacions reals tenen molts més espais, molt més soroll, i estímuls visuals i sonors per tot arreu. Això l'atabala molt i, com passa unes quantes vegades més al llarg del llibre, opta per refugiar-se en un racó, tancar els ulls i plantejar-se algun problema matemàtic per relaxar-se.

En aquesta ocasió el problema és, de fet, un joc. Encara que, potser, qualsevol problema matemàtic es podria considerar un joc.

1. Ho creieu així? Quines característiques hauria de tenir una activitat, individual o col·lectiva, per poder ser considerada un joc?
2. D'un joc sempre cal esperar-ne guanyar o perdre?

De fet, la paraula *joc* o l'acció de *jugar* pot tenir una àmplia varietat de significats i de matisos.

3. Creieu que *joc* és clarament oposat a *treball*? En quins casos és veritat i en quins no? Per què?

També hi ha qui es guanya la vida jugant i qui treballa tan a gust com si jugués...

En aquest cas, el joc que tria el nostre protagonista és una activitat individual, amb un camp d'operacions definit, unes regles concretes per fer evolucionar la situació i un objectiu a aconseguir, per bé que obert. La seva extraordinària capacitat de concentració li permet jugar-hi mentalment. La majoria no arribem a tant, però podem gaudir del joc sobre un paper o amb una pantalla. Juguem-hi, doncs, una mica...

El matemàtic que jugava

John Horton Conway (Liverpool 1937 - Nova Jersey 2020) és molt difícil d'encapsular. Segons el seu biògraf, és una barreja d'Arquímedes, Mick Jagger, Salvador Dalí i Richard Feynman.

És universalment reconegut com un matemàtic de primera classe, com en dona fe la seva posició en la càtedra John Von Neumann de Matemàtiques a la Universitat de Princeton.

El seu gran talent i extraordinària originalitat el van portar a contribuir significativament a la teoria de grups, teoria de nusos, teoria de nombres, teoria de codis i teoria de jocs (entre altres coses).

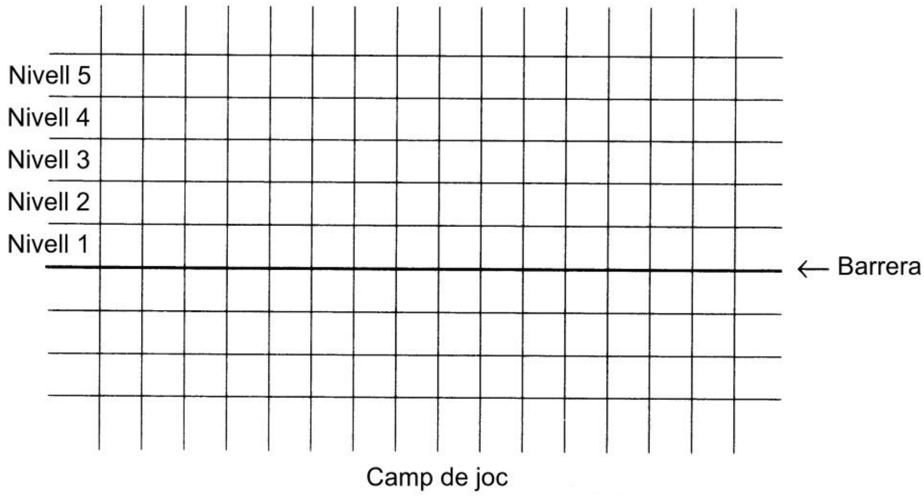
John H. Conway. Imatge: Universitat de St. Andrews

També és l'inventor dels nombres surreals que sembla ser la darrera extensió del sistema numèric. I en les matemàtiques populars, l'àrea en la qual ha adquirit més fama, ha inventat l'autòmat cel·lular anomenat "el joc de la vida".

Aquí, com explica en Christopher al capítol 191, ens ocuparem d'un altre joc cel·lular que és molt senzill i, al mateix temps, molt profund.

El problema d'en Christopher

Imagineu-vos un tauler d'escacs infinit dividit pel mig per una barrera infinita com a la figura següent:



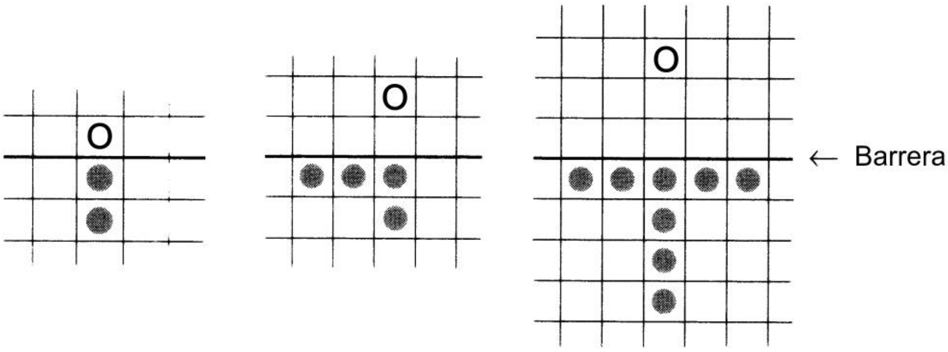
A sobre de la barrera, els nivells horitzontals estan numerats de la manera indicada.

Es posen fitxes als quadrats de sota la barrera que es poden moure, només, si poden saltar per sobre d'una altra fitxa en horitzontal o en vertical (no en diagonal) i col·locar-se en un quadrat buit, dos quadrats més enllà; la fitxa sobre la qual s'ha saltat queda eliminada o "sacrificada".

El problema de Conway associat amb aquesta situació consisteix a trobar configuracions inicials de fitxes a sota de la barrera que permetin portar una sola fitxa a un nivell objectiu a sobre de la barrera.

Primer de tot, és instructiu experimentar i practicar amb diverses disposicions de fitxes.

La figura següent mostra les configuracions minimals necessàries per fer arribar una fitxa als nivells 1 (a), 2 (b) i 3 (c). En cada cas, el quadrat objectiu **O** indica a on es pot fer arribar una única fitxa.

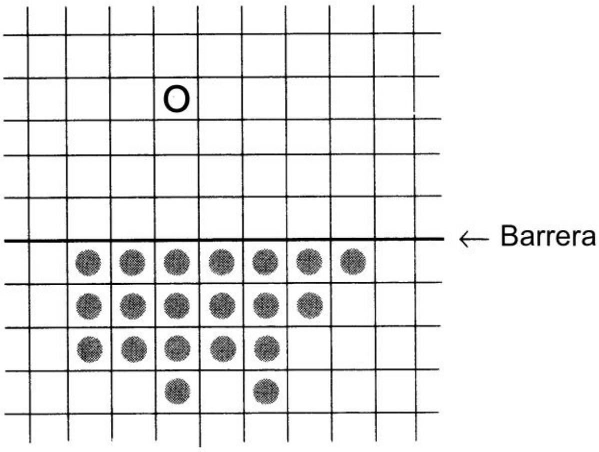


(a) (b) (c)

4. Comproveu els moviments necessaris que permeten fer arribar una fitxa al nivell indicat.

El nombre minimal de fitxes que calen per assolir els nivells 1, 2 i 3 és, per tant, 2, 4 i 8, respectivament.

La resposta per al nivell 4 és més complicada, i es podria pensar que el nombre de fitxes inicials (exèrcit) seria de 16, però tenim una sorpresa, i és que calen 20 fitxes per fer arribar una fitxa al quadrat **O**, com es veu a la figura següent:



5. Us podeu ajudar amb l'aplicació interactiva del joc que hi ha en aquest enllaç.

I aquí no s'acaben les sorpreses. Resulta que al nivell 5 és impossible fer-hi arribar una sola fitxa independentment del nombre de fitxes que formin l'exèrcit a sota de la barrera. Això ho va demostrar Conway amb un mètode molt enginyós de demostració que utilitza els nombres de Fibonacci.

Si us interessa seguir aquesta demostració, en podeu trobar una exposició molt clara al llibre: Tanton, J. (2001). *Solve This: Math Activities for Students and XClubs*, The Mathematical Association of America. Hi ha traducció al castellà: *¡Resuélvelo!: Retos lúdicos para curiosos de las matemáticas*, Real Sociedad Matemática Española. Editorial SM, 2018.

Equacions de segon grau

Per anar a Londres a trobar-se amb la seva mare, en Christopher es veu obligat a agafar el tren. De seguida s'adona que és un espai on no es troba a gust, ja que hi ha molta gent i no se'n pot sortir una vegada s'ha posat en marxa.

De tota manera, el fet que el tren es posés en marxa sembla que ha resultat favorable per als seus plans, per a desgràcia del policia que li fa companyia en aquest capítol.

Així com en altres capítols ha fet servir altres tècniques mentals per asserenar-se una mica de la tensió que li provoquen les situacions en què es veu ficat, en aquest opta per resoldre equacions de segon grau. Per fer-ho utilitza una famosa fórmula que dona el valor de la incògnita com a resultat d'unes operacions entre els coeficients de l'equació.

1. Sabeu què volem dir quan parlem del grau d'una equació?
2. Teniu clara la diferència entre incògnites i coeficients? Podríeu explicar-la a algú que no ho vegi?
3. Coneixeu la fórmula que utilitza?
4. La podríeu aplicar de memòria?
5. Sabeu quin va ser el camí per deduir-la?
6. Sabeu a quin coeficient correspon cada una de les lletres que hi surten? Anoteu-los i comproveu si coincideixen amb els que han calculat altres companys.

Per fer-ho més complicat (i més entretingut), en Christopher es planteja equacions amb coeficients llargs, de diverses xifres. Això fa que les operacions que ha de fer mentalment siguin més difícils.

7. Sabeu fer alguna operació aritmètica mentalment? Quina? Ho podeu demostrar?

El grau de dificultat per resoldre una operació partiria del nivell més fàcil, que seria fer-la amb una calculadora; un pas intermedi implicaria aplicar l'algoritme de l'operació de manera manual amb paper i bolígraf; la dificultat més extrema seria aplicar aquest algoritme (o algun altre que pugui funcionar) de manera mental, sense cap suport físic per anotar els resultats parcials.

Potser amb una suma no gaire llarga t'hi veuries amb cor. Una multiplicació entre nombres de diverses xifres ja requereix una concentració elevada. L'extracció mental d'una arrel quadrada (que no sigui una que coneguem prèviament) ja és una tasca per a veritables especialistes.

8. Coneixeu algun algoritme per extreure l'arrel quadrada d'un nombre?
9. Creieu que té algun valor aquest esforç mental o de càlcul sobre el paper si tenim en compte la possibilitat de fer-ho amb una calculadora? Per què?

Es faci com es faci, el fet veritablement transcendental és que coneguem una fórmula que ens proporcioni alguna solució.

10. Sabeu quantes solucions diferents pot tenir una equació de segon grau?

Està clar que les possibles solucions hauran de dependre dels coeficients.

11. Creieu que, a primer cop d'ull i en vista de l'equació, podem deduir alguna cosa sobre l'existència o no d'aquestes solucions? Podeu justificar-ho?
12. Sabeu a què corresponen aquestes solucions en la representació gràfica de la funció que igualem a zero en l'equació? Expliqueu-ho amb les vostres paraules.
13. I més enllà del segon grau... sabeu d'alguna fórmula que permeti resoldre equacions de tercer o més graus?

En els pròxims apartats veurem algunes aportacions que s'han fet al llarg de la història.

Les aportacions d'Al-Khwarizmi

Fa milers d'anys els matemàtics ja s'havien trobat amb equacions de segon grau, com ara $x^2+10x=39$, i com que no podien fer servir els mètodes amb els quals resolien les equacions de primer grau, van inventar diversos mètodes nous, un dels quals s'anomenava "compleció de quadrats".

Aquest mètode el van descobrir civilitzacions antigues com els babilonis i els grecs. El primer matemàtic que va generalitzar aquest mètode de resolució geomètricament va ser Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, que va viure a Bagdad i que va traduir molts textos matemàtics grecs a l'àrab. Al-Khwarizmi és conegut com el "pare de l'àlgebra" i, en el seu llibre *Hisab al-jabr w'al-muqabala*, escrit cap a l'any 825 i que és un manual per resoldre equacions, va donar una solució interessant amb demostració per resoldre equacions de segon grau completant el quadrat.

El terme *àlgebra* és una versió llatinitzada de la paraula àrab *al-jabr* que apareix al títol del llibre. El títol sencer possiblement significa 'ciència de transposició (de termes negatius) i simplificació de termes iguals'.

Jabr seria la transposició, i es fa servir en el pas en què una equació com $x-4=10$ esdevé $x=14$. En aquest pas, la banda esquerra de l'equació, en la qual a x se li restava 4, s'ha "restaurat" a x.

La simplificació de termes iguals seria el *muqabala*, que ens porta, per exemple, de $x^2+x=x^2+4$ a $x=4$ "simplificant" o "equilibrant" els dos nombres de l'equació.

Al-Khwarizmi també va escriure un altre llibre molt important sobre aritmètica en el qual es presenta i s'explica el sistema de numeració hindú-àrab. A través de l'aritmètica, Al-Khwarizmi va afegir una altra paraula a les llengües actuals. Una traducció al llatí comença amb les paraules “Dixit algorizmi” o “Algorisme diu” i segueix amb instruccions per fer diversos càlculs.

Per tant, *algorisme*, una versió llatinitzada del nom del matemàtic, ha esdevingut el significat actual d’un procediment computacional general.

Ara mirarem d’entendre el mètode de compleció de quadrats.

Al-Khwarizmi va considerar el problema següent:

> Un quadrat, i deu arrels d’aquest, són igual a 39 dírhams. És a dir, quin ha de ser el quadrat tal que, quan s’incrementa en deu les seves pròpies arrels, dona un total de 39?

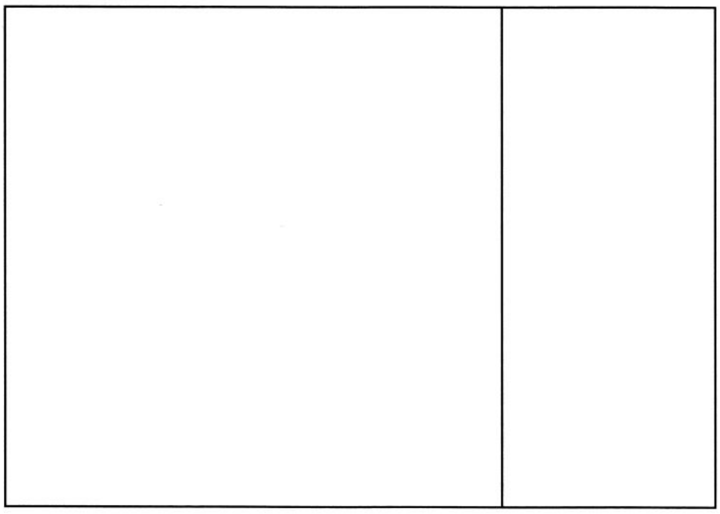
Quan Al-Khwarizmi usava el terme ***quadrat*** es referia a l’equivalent de x^2, i quan deia ***arrels*** es referia a x. Així, el problema original d’Al-Khwarizmi es tradueix a $x^2 + 10x = 39$. Ara bé, els símbols algebraics encara no s’havien inventat; per tant, Al-Khwarizmi va resoldre aquesta equació de segon grau amb paraules i dibuixos. La solució és aquesta:

> Agafa la meitat del nombre d’arrels, que en el cas que ens ocupa és 5. Aquest valor el multipliques per ell mateix: el producte és 25. Suma això a 39; la suma és 64. Ara agafa l’arrel d’aquest valor, que és 8, i resta-li la meitat del nombre d’arrels, que és 5; la diferència és 3. Aquesta és l’arrel del quadrat que buscàvem; el quadrat en si mateix és 9.

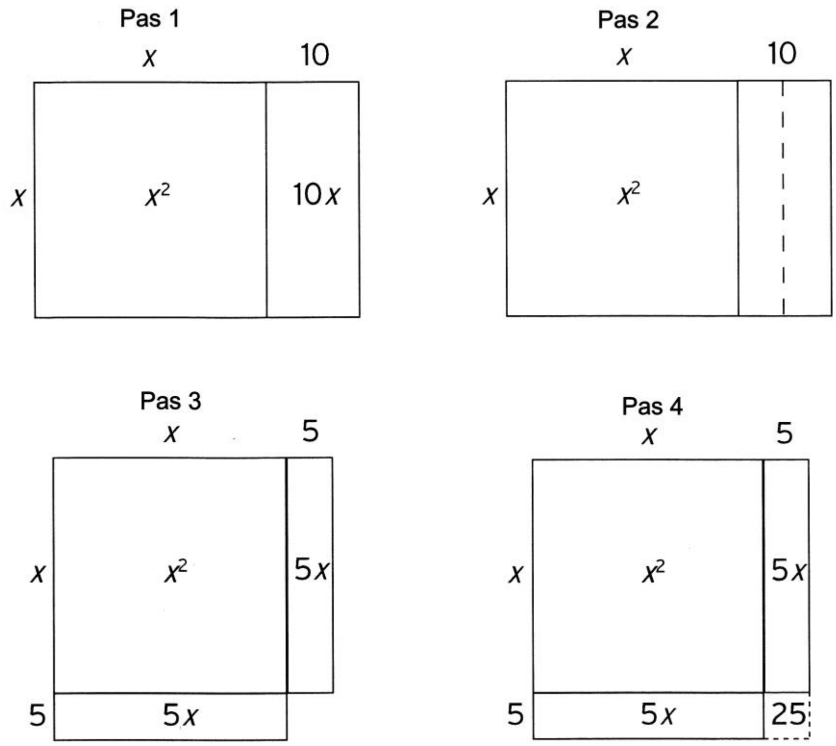
14. Mireu si podeu donar sentit a la solució d’Al-Khwarizmi marcant valors en la figura de més avall per representar l’expressió de segon grau $x^2 + 10x$. Recordeu que x^2 significa ‘**quadrat**’ i que x significa ‘**arrel**’.

    a) Marqueu valors en la figura per representar “un quadrat, i aleshores deu arrels d’aquest, són igual a 39 dirhams” o, de manera equivalent, $x^2 + 10x = 39$.

    b) Ara proveu d’alterar el vostre dibuix d’acord amb la solució escrita per Al-Khwarizmi.



Mètode geomètric d'Al-Khwarizmi per resoldre equacions de segon grau



15. Utilitzeu el mètode d'Al-Khwarizmi per resoldre les equacions de segon grau completant el quadrat de manera geomètrica.

    a) $x^2 + 6x = 7$ b) $x^2 + 8x = 20$

16. Podeu resoldre $x^2 + 6x + 8 = 0$ amb el mètode d'Al-Khwarizmi? Expliqueu la vostra resposta.

17. Podeu resoldre $2x^2 + 12x = 144$ amb el mètode d'Al-Khwarizmi? Expliqueu la vostra resposta.

Aquests darrers exercicis són més difícils. Us hi veieu amb cor?

18. Completeu el quadrat a $x^2 + bx = 7$ fent servir el mètode geomètric d'Al-Khwarizmi.

19. Ara, com a repte extra, completeu el quadrat a $ax^2 + bx = c$, la forma general d'una equació de segon grau, amb el mètode geomètric d'Al-Khwarizmi. Recordeu que Al-Khwarizmi només considerava equacions de segon grau en què el coeficient de x^2 és 1.

Al-Khwarizmi no feia servir cap símbol aritmètic o algebraic; només utilitzava paraules per explicar les seves equacions, diagrames i mètodes.

20. Poseu-vos en el lloc d'Al-Khwarizmi i proveu d'explicar al món com completar el quadrat. En general, com explicaríeu els passos que cal fer per completar el quadrat amb les vostres pròpies paraules? (Això és el que has fet geomètricament.)

L'equació de tercer grau: fórmula de Cardano

El matemàtic, metge, astròleg i filòsof italià **Girolamo Cardano** (1501-1576) va publicar les fórmules algebraiques per a la resolució d'equacions cúbiques i quàrtiques en el seu llibre ***Ars Magna*** (1545).

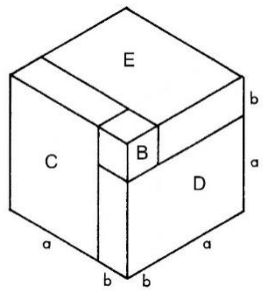
La fórmula de la cúbica la hi havia explicat un altre matemàtic italià, **Niccolo Fontana** (**Tartaglia**) (1500-1557), amb la condició de mantenir-ne el secret; això no és un demèrit de l'obra de Cardano, el qual, en el seu llibre, va explicar aquesta fórmula en termes geomètrics i va dedicar molts anys de treball a fer un estudi complet de les equacions de tercer grau.

Cal tenir en compte que els matemàtics del Renaixement tractaven equacions com ara $x^3 + px = q$ i $x^3 = px + q$ com a diferents, perquè no reconeixien l'existència dels nombres negatius.

Ara, al llarg de les activitats (22 a 28), ens acompanyareu en el procés de resolució de l'equació de tercer grau.

Etapa 1. Identitat de Cardano

A l'*Ars Magna*, Cardano considera una igualtat a partir dels volums de la dissecció del cub de la següent figura de costat $a+b$, on una de les peces A no es veu perquè està amagada al darrere i té volum $a \cdot a \cdot a = a^3$.



21. Si $x = a + b$, considerant les cinc peces de la dissecció, expliqueu la igualtat següent:

$$x^3 = 3abx + a^3 + b^3$$

Etapa 2

En aquest pas considerarem el problema de trobar nombres A i B sabent la seva suma: $S = 90$ i el seu producte: $P = 1961$.

$A + B = 90$ i $A \cdot B = 1961$; $B = 90 - A$ i substituint $A \cdot (90 - A) = 1961$;

$90A - A^2 = 1961$, que ens dona l'equació de segon grau $A^2 - 90A + 1961 = 0$ i que té com a solucions 37 i 53, que corresponen als valors d' A i B.

En general, si la suma és S i el producte P, trobarem els nombres resolent l'equació de segon grau $x^2 - S \cdot x + P = 0$.

22. Apliqueu el mètode per trobar nombres A i B que tinguin per suma S i per producte P en els casos següents:

$S = 91$ i $P = 1728$ $\qquad$ $S = 98$ i $P = -3375$ $\qquad$ $S = 4$ i $P = 125$

Etapa 3. Resolució d'una equació de tercer grau

23. Considerem l'equació $x^3 = 36x + 91$.

D'acord amb l'etapa 1, posem $x = a + b$ i busquem a i b seguint aquests passos:

a) Aplicant la igualtat obtinguda a l'activitat 22, quins han de ser els valors de $a \cdot b$ i $a^3 + b^3$?

b) Ara, aplicant l'etapa 2 i considerant $S = a^3 + b^3$ i $P = a^3 \cdot b^3$, podrem calcular $A = a^3$ i $B = b^3$.

c) Calculant arrels cúbiques, quant valen a i b? Comproveu que $x = a + b$ és la solució de l'equació proposada.

d) L'equació $x^3 = 36x + 91$ té altres solucions?

24. Apliqueu el mètode per trobar les solucions de l'equació $x^3 + 45x = 98$.

Etapa 4. Fórmula de Cardano

25. Demostreu, aplicant el mètode anterior a l'equació $x^3 = px + q$, que:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Aquesta és l'anomenada "**fórmula de Cardano**" per a aquest tipus d'equació.

Etapa 5

Aplicant la fórmula de Cardano a la cúbica $x^3 = 15x + 4$, trobem un resultat realment misteriós:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Si al segle XVI els nombres negatius ja eren molt sospitosos, les seves arrels quadrades es veien absurdes del tot i s'arribava a la conclusió que l'equació era irresoluble. Però, com es pot comprovar, aquesta equació té tres arrels reals $x = 4$ i $x = -2 \pm \sqrt{3}$.

Aquest tipus d'equacions constitueixen l'anomenat "**cas irreduïble**" de l'equació cúbica.

Cardano va fer alguns intents d'explicar la situació i treballar amb el que ara anomenem **nombres imaginaris** o **complexos**, però no va anar més enllà, i ho va deixar com a quelcom "tan subtil com inútil".

Va ser un altre italià, **Rafael Bombelli** (1526-1573), qui, en el seu tractat *Àlgebra* del 1572, va fer un pas de gegant en considerar els nombres imaginaris com el vehicle necessari que transportaria el matemàtic de l'equació cúbica real a les seves solucions reals; és a dir, encara que comencem i acabem en els familiars nombres reals, ens cal traslladar-nos al món no familiar dels nombres imaginaris per completar el nostre viatge.

26. Bombelli va veure que (comproveu-ho):

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121} \text{ i } \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - \sqrt{-121}$$

Amb això acabeu de resoldre l'equació $x^3 = 15x + 4$

Etapa 6

En notació moderna, l'equació completa de tercer grau $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ es pot reduir a l'equació del tipus $x^3 = p + qx$ (tipus Cardano), amb la transformació (canvi de variable) $x = y - \dfrac{a}{3}$.

27. Comproveu que fent aquesta transformació eliminem el terme quadràtic de l'equació. Com a aplicació, resoleu:

$$x^3 + 6x^2 + 3x + 18 = 0$$

Rumb

Al capítol 179, després que el seu pare li hagi confessat que va ser ell qui va matar el Wellington, en Christopher té clar que ha de fugir i anar a trobar la seva mare.

Això serà tot un repte per a ell. El seu ambient més confortable és un espai controlat i conegut on es pugui sentir protegit. Ara, en canvi, haurà de viatjar fins a Londres i, una vegada allà, haurà de trobar l'adreça on viu la seva mare.

El primer obstacle a superar se li presenta ja en la seva mateixa ciutat: ha de localitzar l'estació de tren, la qual, com que no forma part del seu recorregut habitual, no sap on es troba. Per les indicacions que li dona una senyora, pot saber que l'estació està relativament a prop d'on és ell, i pensa que en aquest cas sap una tàctica per trobar-la, que consisteix a anar fent una mena de moviment en espiral pels carrers.

1. Enteneu bé el procediment seguit per en Christopher per arribar a l'estació? Proveu de reproduir-lo a peu (o sobre un mapa) pel vostre poble o ciutat per arribar a un determinat lloc.
2. Creieu que és un procediment que sempre funciona? En quins casos pot funcionar i en quins no?

El moviment per una trama urbana desconeguda i sense mapa ni GPS es podria assimilar a un trajecte per un laberint.

3. Coneixeu algun sistema que garanteixi sortir d'un laberint?
4. De fet, no hi ha laberints infal·libles, i aplicant la tàctica correcta sempre en podrem arribar a sortir. Podeu provar-ho en aquest enllaç.

Al capítol 227, en Christopher es torna a trobar que ha de localitzar un carrer de Londres, però ara amb l'avantatge que disposa d'un plànol de la zona. I torna a aplicar la tècnica de l'espiral, però com que és un mapa que té escrits els noms dels carrers, simplement li cal anar passant el dit per sobre i anar mirant els noms que diu fins a trobar el del carrer que busca.

Aquí, evidentment, no hi ha cap tàctica especial més enllà d'assegurar-se que llegeix el nom de tots els carrers que surten al mapa.

5. És imprescindible que sigui una espiral, ara que té el plànol? De quina altra manera ho podria fer per trobar el carrer on viu la mare, aplicant la seva lògica?

Plantegem-nos ara un altre problema basat en l'orientació en l'espai. Imagineu-vos que seieu en un banc d'un parc i davant teniu un espai obert, al mig del qual creix un arbre solitari ben vistós. I sabeu, amb força exactitud, quant mesura cada una de les vostres passes.

6. Com calcularíeu aproximadament a quina distància està el banc de l'arbre?

Ara suposem, com a punt desfavorable, que entre el lloc on sou i l'arbre del davant hi corre un riu d'aigües turbulentes que és impossible de travessar, però que, com a punt favorable, disposeu d'un mesurador d'angles i d'una brúixola.

7. Com calcularíeu en aquestes condicions la distància fins a l'arbre?
8. Us sembla que podríeu saber-ne també l'altura? Com la calcularíeu?

Encara més favorable: a prop vostre hi teniu un amic que disposa d'un joc de materials idèntic al vostre.

9. Podríeu, de manera coordinada, dibuixar un croquis a escala sobre el full quadriculat d'una llibreta de la situació de l'arbre i de cada un de vosaltres dos? Com ho faríeu?

Encara que sembli mentida, amb eines potser una mica més sofisticades, però basades en els mateixos principis, es van confeccionar tots els mapes de tot el planeta abans que cap avió o enginy aeri en pogués fer una fotografia des de l'aire. Però també van servir per determinar el radi de la Terra i les distàncies a la Lluna, al Sol i a un bon nombre d'estrelles…

El joc dels espies

Per fer aquesta activitat necessitarem un regle graduat, un transportador d'angles, un compàs i un full quadriculat.[1]

El camp d'operacions serà un full de paper quadriculat (si pot ser, d'1 cm). Col·loqueu aquest full en posició "vertical". Assenyaleu l'origen 0 a prop de la cantonada inferior esquerra (en una intersecció de dues línies contínues) i marqueu els eixos 0, 2, 4, 6, etc. L'escala serà de 2 cm a 2 km i valors de *x* (cap a l'est) fins a 14 i valors de *y* (cap al nord) fins a 20.

Aquest full representarà el mapa d'una regió de territori enemic del qual voleu obtenir informació. Per fer-ho, tindreu a càrrec vostre sis agents que s'han infiltrat a la regió i que tenen els punts d'observació situats en els llocs següents:

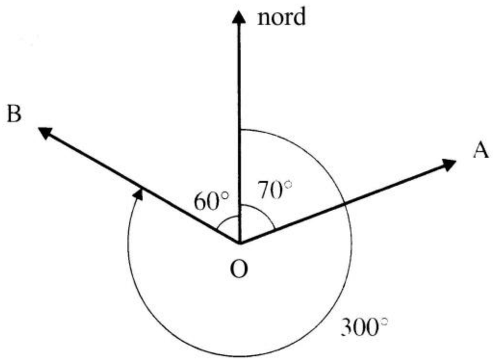
A (2,6), és a dir, 2 km a l'est i 6 km al nord de l'origen. I:

B (8,6)	**C** (12,14)	**D** (6,14)	**E** (13,19)	**F** (2,2)

10. Marqueu aquests punts al mapa i comproveu acuradament que ho heu fet de manera correcta. Per exemple, comproveu que **B** i **C** estan 6 km a l'est d'**A** i **D**, respectivament, i que **F** està 4 km al sud d'**A**.

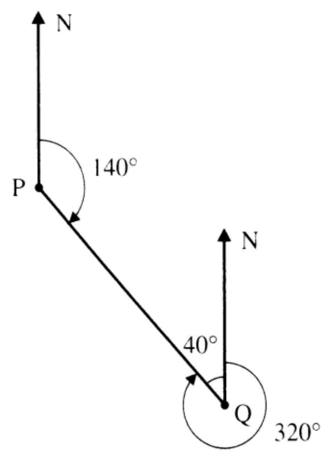
[1] També pot ser útil fer servir alternativament les eines matemàtiques que ens proporciona la trigonometria elemental, encara que podem arribar a resultats força aproximats només amb els instruments assenyalats més amunt. També es pot fer amb valors totalment exactes per mitjà de GeoGebra o algun paquet similar d'aplicacions matemàtiques.

Per tal d'orientar-nos amb l'ajuda d'un mapa i una brúixola, és convenient precisar les direccions a seguir. Habitualment es dona un angle per fixar una direcció: l'angle que forma aquesta direcció amb el nord magnètic és el que anomenarem ***rumb***. Definim, doncs, el rumb d'un punt respecte d'un altre com l'angle que forma la visual del punt objecte des del punt origen respecte de la direcció nord i comptat en el sentit de les agulles de rellotge. Per tant, el rumb d'un punt des d'un altre pot prendre un valor de 0 a 360 graus.



El **rumb** d'**A** des d'**O** és de 70º i el **rumb** de **B** des d'**O** és de 300º.

Això vol dir que, estant situat a **O** i encarat al nord, em giro en el sentit de les agulles del rellotge fins que estic encarat cap a **A** (o cap a **B**); l'angle que he girat és el rumb d'**A** des d'**O** (o de **B** des d'**O**).



El **rumb** de **Q** des de **P** és de 140º i el **rumb** de **P** des de **Q** serà de 320º.

11. Com a exercici introductori, trobeu la distància i el rumb de:

- **D** des d'**A**
- **C** des d'**E**

12. Ara localitzeu i doneu les coordenades de les instal·lacions següents a partir de la informació que us proporcionin els vostres agents. En alguns casos hi ha dues posicions possibles: les heu de donar totes dues.

a) Un graner **G** té un rumb de 26,5º des d'**A** i de 315º des de **B**.

b) Un heliport **H** té un rumb de 166º des de **B** i de 194º des de **C**.

c) El centre de telecomunicacions internes **I** està a 5,1 km des de **B** i 5,8 km des de **C**.

d) Un encreuament ferroviari molt important **J** té un rumb de 300º des de **C** i està a 4 km de **D**.

e) Una base de míssils **M** també té un rumb de 300º des de **C** i està a 7 km de **D**.

f) S'ha construït un reactor nuclear a **N** que equidista d'**A** i **B** (les distàncies **AN** i **BN** són iguals) i té el mateix rumb des de **C** que des de **D**.

g) L'altra font energètica principal del país és la central elèctrica **P,** que és equidistant de **C** i **D** i està a 2,6 km de **B**.

h) La vigilància contra l'aviació i els míssils la fa una estació de radar a **R**, equidistant d'**A** i **D** i exactament al nord d'**A**.

i) El dipòsit central de subministraments **S** de l'exèrcit també és equidistant d'**A** i **D** i està a 2,6 km al nord de la carretera recta que uneix **A** i **B**.

j) La terminal principal del ferrocarril **T** és equidistant de **B**, **C** i **D**.

k) **A** i **F** estan a la riba d'un canal recte que és utilitzat per l'estació de bombar aigua **W,** que cobreix les necessitats de la zona. **W** està ubicada exactament al sud-oest de **C** i és equidistant del canal i de la carretera que uneix **A** i **B**.

l) A l'agent situat a **E** se li ha demanat que recomani un punt estratègic **X** perquè hi aterrin paracaigudistes. La seva recomanació és que **X** hauria d'equidistar de **CD** i **CE** i estar al més proper possible d'**E**.

m) Després de rebre i processar les dades, us poseu en contacte per ràdio amb el vostre agent a **A** (en codi, naturalment) per demanar-li informació addicional que necessiteu per eliminar les incerteses que teniu sobre algunes de les localitzacions. Després de disculpar-se, us diu que **J** és aproximadament equidistant d'**I** i **T** i que els rumbs de **P** i **N** des d'**I** difereixen en uns 180º.

Imatge: [Adobe Stock]

Ternes pitagòriques

El darrer capítol del llibre, titulat “233”, comença amb una situació de màxima tensió a la casa de Londres on viuen el senyor Shears i la mare d’en Christopher, i acaba, després de moltes pàgines (un fet força insòlit en aquest llibre), amb un desenllaç més o menys plàcid.

1. L’arribada del noi a Londres ha causat un trasbals notable. Us sembla que era previsible? De quina altra manera podria haver reaccionat el senyor Shears? I la mare d’en Christopher?
2. Quan heu començat a llegir el capítol, se us ocorria alguna manera per tal que la situació es pogués conduir raonablement?

De fet, sembla que la insistència d’en Christopher a fer l’examen complica encara molt més les coses.

3. Veieu raonable el comportament tan intransigent del noi en aquesta qüestió? Quins arguments a favor i en contra de la seva postura podeu enumerar?
4. Creieu que la situació està ben gestionada per part de la mare? Podia fer-ho d’una altra manera? Què us sembla que hauria hagut de fer?

El senyor Shears, com podem imaginar, no està disposat a suportar el grau de tensió que suposa la presència d’en Christopher a casa seva. A final, no queda més remei que mare i fill se’n tornin a Swindon. Però allà les coses no seran gaire més tranquil·les amb el seu pare i, a més, el noi continua obsessionat a fer la prova.

5. De quina manera es desencalla la situació? Quines persones hi col·laboren?

Segurament aquest desig tan intens d’en Christopher per fer l’examen té molt a veure amb la seva absoluta seguretat que se’n sortirà amb escreix i així podrà demostrar el que realment val en el camp de les matemàtiques.

6. Heu desitjat mai de manera intensa fer un examen? Per quin motiu?
7. Creieu que es pot estar molt segur que s’aprovarà un examen? En quins casos? O ho considereu més aviat una mena de loteria que depèn molt de la sort?
8. Tenint en compte això, creieu que un examen és vàlid per proporcionar una valoració real i objectiva del nostre coneixement d’una matèria? Quines alternatives hi podria haver?

A l’examen que fa en Christopher hi ha una pregunta que li agrada tant que li dedica un apèndix en el seu llibre.

La pregunta en qüestió té relació amb el que s’anomena una “terna pitagòrica”, que és qualsevol conjunt de nombres enters tals que, si designen les mides dels costats d’un triangle, aquest triangle ha de ser forçosament rectangle. Per exemple, si ens donen tres bastonets que mesuren 3, 4 i 5 vegades d’una unitat de mesura qualsevol i ens diuen que construïm amb ells un triangle, aquest triangle tindrà sempre un angle recte.

9. Us heu topat mai amb un problema matemàtic per al qual hàgiu trobat o us hagin explicat una solució que us hagi semblat especialment bella? Recordeu quin o quins?
10. Creieu que les matemàtiques poden arribar a ser belles? Per què sí o per què no?
11. Us sembla que si ens donen els tres costats d'un triangle, els podríem disposar de maneres diferents i així obtenir triangles diferents (llevat de rotacions i simetries)?
12. Això passaria també amb un quadrilàter?
13. I amb algun polígon de més costats?

Les ternes pitagòriques, d'acord amb el teorema de Pitàgores, compleixen l'equació $x^2 + y^2 = z^2$, amb x, y i z com a nombres enters.

Us recorda en alguna cosa la famosa equació que donava lloc al darrer teorema de Fermat? Sí, de fet, l'equació objecte del teorema avui anomenat de Wiles-Fermat és $x^n + y^n = z^n$.

14. Sabeu què enuncia el teorema?
15. Per què creieu que ha passat a dir-se "de Wiles-Fermat"?

El teorema assegura que per a $n > 2$ és impossible trobar valors enters de x, y i z que compleixin la igualtat. En canvi, per a $n = 1$ i $n = 2$ sí que podem trobar ternes de valors (x, y, z) que la compleixin.

16. Podeu dir-ne alguna?
17. Quantes ternes creieu que hi pot haver per a $n = 1$? I per a $n = 2$?

La pregunta preferida de l'examen

En Christopher ens diu que la seva pregunta preferida de l'examen de matemàtiques és aquesta:

> Demostra el següent resultat:
>
> Un triangle els costats del qual es poden representar amb la fórmula n^2+1, n^2-1 i $2n$ (on $n>1$) és un triangle rectangle.
>
> Demostra amb un exemple que l'enunciat invers és fals.

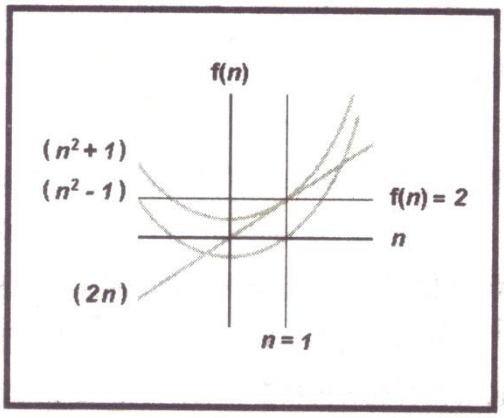
Li agrada tant, que decideix escriure la solució del problema en un apèndix del llibre.

A continuació treballarem alguns aspectes d'aquesta solució.

En primer lloc, es determina quin és el costat més llarg del triangle (que serà la hipotenusa). Se'n donen dues explicacions: una de caràcter algebraic i una amb l'ajuda de gràfiques (rectes i paràboles).

18. Comenteu la primera justificació que n^2+1 sempre és el costat més gran del triangle, explicant el raonament d'en Christopher.

19. Ara comenteu la segona justificació mitjançant gràfiques (com que la gràfica no és gaire precisa, podeu tornar a reproduir-la amb l'ajuda d'algun programa informàtic, per exemple, GeoGebra).



a) En el dibuix, sembla que la recta ($2n$) i la paràbola (n^2+1) són tangents. Ho podeu justificar?

b) Quins són els punts d'intersecció de les dues paràboles i la recta?

c) A partir de tot això, podeu explicar per què n^2+1 és el costat més llarg del triangle si $n>1$? I, dels altres dos costats ($2n$ i n^2-1), quin és més llarg?

Tot seguit es demostra que el triangle és rectangle.

Segons el text, es fa amb el teorema de Pitàgores, però això no és del tot cert. En realitat, es fa servir el teorema recíproc del teorema de Pitàgores ("invers", com es diu al text).

Donat un teorema en la forma "si es verifica A (hipòtesi), aleshores es verifica B (tesi)", el seu recíproc és el que resulta d'invertir la hipòtesi i la tesi, és a dir, és el teorema que té la forma "si es verifica B (hipòtesi), aleshores es verifica A (tesi)".

En el cas del teorema de Pitàgores:

ABC és un triangle amb la notació habitual $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$.

Si $\angle ACB = 90^{\circ}$, aleshores $c^2=a^2+b^2$

Teorema recíproc:

Si $c^2=a^2+b^2$, aleshores $\angle ACB = 90^{\circ}$

20. Busqueu demostracions del teorema de Pitàgores i del seu recíproc.

Un teorema pot ser cert, però no necessàriament ho ha de ser el seu recíproc, com sí que passa en el cas anterior del teorema de Pitàgores.

21. Considereu els teoremes següents i escriviu l'enunciat dels seus recíprocs. Digueu, també, si són certs els teoremes (si és així, caldrà demostrar-ho) i si són certs els seus recíprocs (si no ho són, n'hi haurà prou a donar contraexemples).

    a) Si la xifra de les unitats d'un nombre natural és parell, aleshores el nombre és divisible per 2.
    b) Si la xifra de les unitats d'un nombre natural és 5, aleshores el nombre és divisible per 5.
    c) Si $a = 6$, aleshores $a^2 = 36$.
    d) Si un quadrilàter és un quadrat, aleshores el quadrilàter té els quatre costats iguals.
    e) a, b, c són nombres naturals amb $a < b < c$. Si a divideix b i b divideix c, aleshores a divideix c.
    f) a i b són nombres naturals. Si a^2 divideix b^3, aleshores a divideix b.
    g) ABC és un triangle amb la notació habitual. Si ABC té els tres costats iguals, aleshores té els tres angles iguals.

La segona part de la pregunta de l'examen ens diu:

> Demostra amb un exemple que l'enunciat invers és fals.

Aquí, en Christopher construeix un triangle rectangle de catets 25 i 60 i hipotenusa 65.

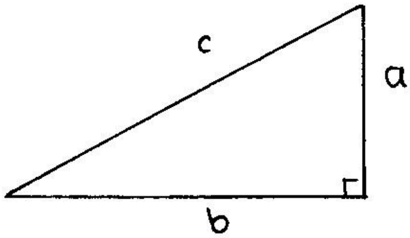
Amb la hipotenusa, trobeu que la n de les nostres fórmules ha de ser $n = 8$, però seguint amb les fórmules, veiem que els catets donen 16 i 63.

Per tant, el triangle d'en Christopher de costats 25, 60 i 65 no encaixa amb les fórmules del problema.

22. El triangle de costats 25, 60 i 65 anterior és semblant al triangle de costats 5, 12, 13. Per què?
    - Comproveu que aquest darrer triangle també és rectangle i tampoc encaixa en les fórmules de la pregunta de l'examen.

Les dues ternes (25, 60, 65) i (5, 12, 13) serien ternes equivalents. Una es pot obtenir multiplicant cada nombre de l'altra pel mateix factor. Quan els tres nombres de la terna no tenen cap factor comú, parlem de **terna primitiva**. En aquest cas (5, 12, 13), seria una terna primitiva.

Com has vist, les ternes de nombres **enters** que han aparegut a la pregunta de l'examen d'en Christopher satisfan el teorema de Pitàgores, és a dir, són els catets (a i b) i la hipotenusa (c) d'un triangle rectangle, i és per aquesta raó que s'anomenen **ternes pitagòriques**.



De fet, van ser els pitagòrics els que van trobar fórmules com les que has manipulat a la pregunta de l'examen, però aquestes fórmules no donen totes les ternes pitagòriques. Per exemple, la terna (5, 12, 13) també verifica $5^2 + 12^2 = 13^2$, és a dir, també és una terna pitagòrica i no encaixa en la sèrie de la pregunta de l'examen, com has vist.

Ternes pitagòriques a la taula de multiplicar

El que mirarem d'obtenir ara seran fórmules que ens permetin generar totes les ternes pitagòriques (hi ha indicis que els babilonis ja sabien trobar-les, però va ser Euclides qui ho va explicitar en els seus *Elements*).

De fet, podem trobar com a mínim totes les ternes primitives a la taula de multiplicar:

x	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	8	10	12	14
3	3	6	9	12	15	18	21
4	4	8	12	16	20	24	28
5	5	10	15	20	25	30	35
6	6	12	18	24	30	36	42
7	7	14	21	28	35	42	49

Trieu qualsevol parell de nombres situats sobre la diagonal principal (nombres quadrats) i els dos nombres idèntics que formin un "quadrat" juntament amb els nombres anteriors. Sumem els dos nombres quadrats, restem-los i sumem els dos nombres idèntics i ja tindrem una terna pitagòrica:

$$\left.\begin{array}{l} a = 25 - 4 = 21 \\ b = 10 + 10 = 20 \\ c = 25 + 4 = 29 \end{array}\right\} \quad 20^2 + 21^2 = 29^2$$

Un altre exemple: trieu a la diagonal principal 1 i 36:

$$\left.\begin{array}{l} a=36-1=35 \\ b=6+6=12 \\ c=36+1=37 \end{array}\right\} \quad 12^2+35^2=37^2$$

23. Quins quadrats (nombres sobre la diagonal) donen la terna (3, 4, 5)? Quins donen les ternes (5, 12, 13) i (7, 24, 25)?

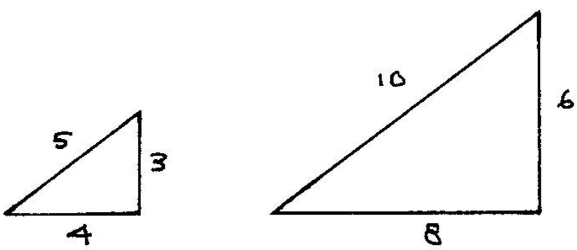
Vegem com funciona tot això. Si els quadrats que hem seleccionat els escrivim p^2 i q^2 amb p més gran que q, com podrem escriure les fórmules per a la terna pitagòrica (x, y, z) en termes de p i q?

24. Justifiqueu que la terna donada per les fórmules que heu trobat en l'apartat anterior sempre donarà una terna pitagòrica.

25. Amb aquestes fórmules, trobeu les ternes pitagòriques que obtindrem per als valors següents de p i q:

p	*q*	*x*	*y*	*z*
2	1	3	4	5
3	1			
3	2			
4	1			
4	3			
5	2			
5	3			
6	3			

26. Observeu que per a $p=3$, $q=1$ heu obtingut la terna (8, 6, 10), la qual és proporcional a la terna (4, 3, 5), i això significa que els triangles rectangles corresponents tenen la mateixa forma tot i que diferent mida, és a dir, són triangles semblants.



D’altra banda, la terna pitagòrica (9, 12, 15) no es pot obtenir amb les fórmules que heu trobat (podeu explicar per què?), però observeu que aquest triangle rectangle és semblant al triangle (3, 4, 5) amb raó de semblança 3.

Amb les fórmules que esteu fent servir, si volem obtenir ternes pitagòriques primitives, els nombres *p* i *q* poden ser tots dos de la mateixa paritat (tots dos parells o tots dos imparells)? I tenir algun divisor comú?

27. Trobeu:

    a) Totes les ternes pitagòriques en què un dels seus elements sigui igual a 17.
    b) Totes les termes pitagòriques en què un dels seus elements sigui igual a 20.

28. Creieu que qualsevol nombre enter pot formar part, com a mínim, d’alguna terna pitagòrica? Expliqueu el vostre raonament.

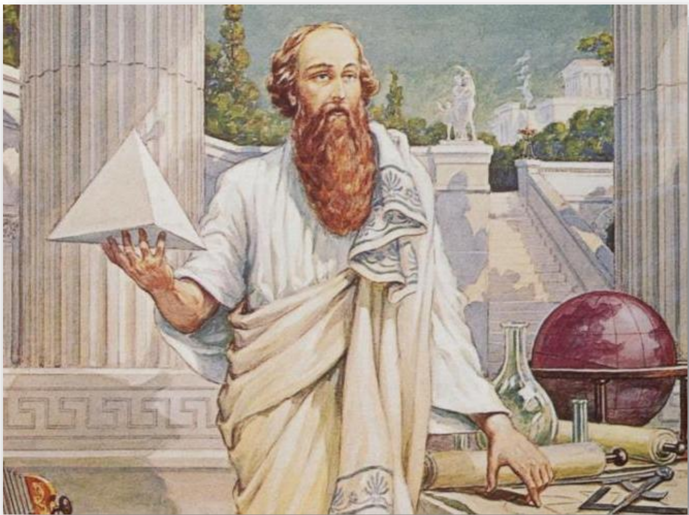
Ternes pitagòriques i fraccions

Una altra manera de generar ternes pitagòriques és a partir de fraccions. Agafem qualsevol parell de nombres imparells consecutius (també ho podem fer en el cas de nombres parells consecutius), per exemple, 7 i 9, i ara sumem els seus recíprocs:

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{16}{63}$$

Llavors, 16 i 63 són els dos catets d’un triangle rectangle de costats enters: $16^2+63^2=65^2$.

29. Comproveu-ho per als nombres 6 i 8. Podeu explicar per què això sempre funciona?



Pitàgores. Imatge: [Museu Egipci]

Annex: El mètode de diferències finites

El mètode de diferències finites és una eina molt potent i es pot fer servir en moltes situacions diferents.

Les successions sempre han estat una font molt rica d'estudi. Aquí ens fixarem en successions que tenen com a terme general una expressió polinòmica. Per exemple, els termes de la successió 5, 7, 9, 11, ... es poden generar amb el polinomi $2n + 3$. Aquesta expressió genera la successió anterior fent $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

L'expressió "$an+b$" genera la successió: $a+b$, $2a+b$, $3a+b$, $4a+b$, ...

Si els termes d'una successió $\{a_n\}$ són $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n, \ldots}$, llavors el conjunt de "diferències finites" de $\{a_n\}$ és definit pels termes:

$$\boldsymbol{a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots, a_n - a_{n-1}, \ldots}$$

I, per tant, el conjunt de diferències de la primera successió és la successió constant:

$$2, 2, 2, \ldots$$

Que el primer conjunt de diferències sigui una successió constant no és un accident. Una successió que té com a terme general un polinomi de primer grau, $an+b$, sempre tindrà un conjunt de diferències finites constant. La constant serà el coeficient de n, com es pot comprovar fàcilment: $\boldsymbol{a, a, a,}$ ...

Una successió generada per un polinomi de segon grau no ens donarà una successió constant en el primer conjunt de diferències. En canvi, sí que ens la donarà en el segon conjunt de diferències.

L'expressió "n^2+3n-4" genera les següents successions de diferències:

Una sota l'altra

0, 6, 14, 24, 36, ...

6, 8, 10, 12, ...

2, 2, 2, ...

En forma de taula

n	n^2+3n-4	$\Delta 1$	$\Delta 2$
1	0		
2	6	6	
3	14	8	2
4	24	10	2
5	36	12	2

Quan una successió donada genera un conjunt de diferències que és constant, es pot trobar el terme general. Considerem la successió següent:

1, 3, 6, 10, 15, ...

El seu terme general ve donat per $\frac{n(n+1)}{2}$.

Podem trobar aquesta expressió utilitzant el "mètode de diferències finites".

Primer de tot, observem que un polinomi general de segon grau an^2+bn+c genera la successió i les diferències corresponents:

$$a+b+c, \quad 4a+2b+c, \quad 9a+3b+c, \quad 16a+4b+c,$$

$$3a+b, \quad 5a+b, \quad 7a+b, \quad .....$$

$$2a, \quad 2a, \quad ....$$

És a dir, el primer terme de la successió de terme general an^2+bn+c és $a+b+c$, el primer terme del primer conjunt de diferències és $3a+b$, i el primer terme del segon conjunt de diferències és $2a$.

En forma de taula seria:

n	an^2+bn+c	$\Delta 1$	$\Delta 2$
1	$a+b+c$		
2	$4a+2b+c$	$3a+b$	
3	$9a+3b+c$	$5a+b$	$2a$
4	$16a+4b+c$	$7a+b$	$2a$
5	$25a+5b+c$	$9a+b$	$2a$

Apliquem tot això a la nostra successió:

1, 3, 6, 10, 15, ...

2, 3, 4, 5, ...

1, 1, 1, ...

Com que el segon conjunt de diferències és constant, el terme general serà de la forma an^2+bn+c i, a més:

$$\begin{cases} 2a=1 \\ 3a+b=2 \\ a+b+c=1 \end{cases}$$

Resolent, tindrem $a=\frac{1}{2}$ per a la primera equació, $b=\frac{1}{2}$ per a la segona, i $c=0$ per a la tercera. Aleshores, el terme general és:

$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Podem continuar la investigació generalitzant aquests resultats a successions generades per polinomis de tercer, quart... grau: an^3+bn^2+cn+d , $an^4+bn^3+cn^2+dn+e$ ...

VALORA QUÈ HAS APRÈS DE MATEMÀTIQUES

18. Recupereu l'activitat que heu fet abans de la lectura per recordar què sabíeu dels onze temes matemàtics que es treballen en aquest quadern i valoreu què heu après de nou i en què ha canviat el que ja sabíeu.

	TEMA/CONCEPTE	QUÈ HE APRÈS? QUIN CONEIXEMENT HE MODIFICAT?
1	Nombres primers	
2	El volum del cub	
3	Forats negres matemàtics	
4	Probabilitats	
5	Algoritmes i dreceres	
6	Caos	
7	Potències de dos	
8	Conway	
9	Equacions de segon grau	
10	Rumb	
11	Ternes pitagòriques