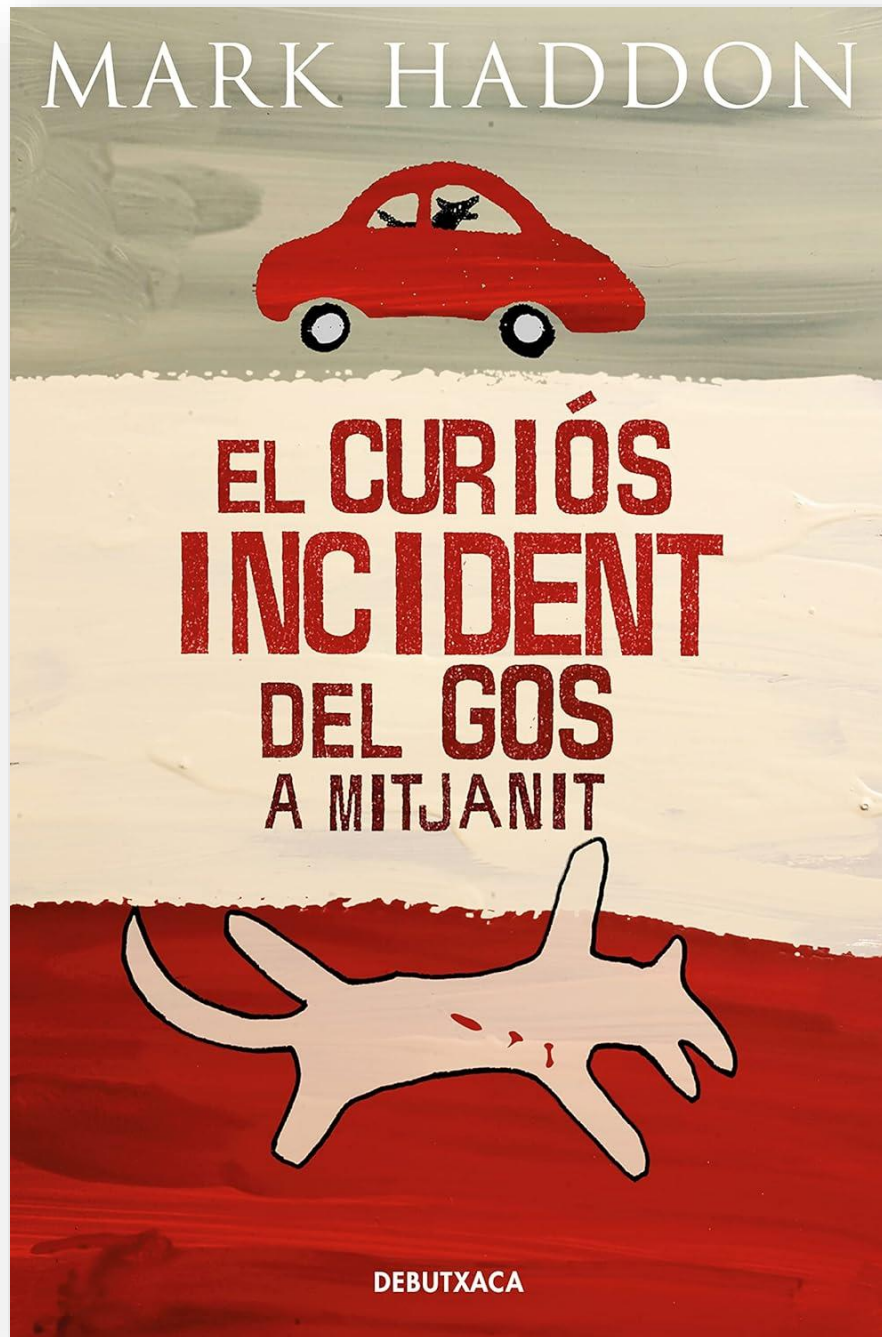


El Gust per la Lectura

Curs 2024-2025



Orientacions per al professorat

El Gust per la Lectura 2024-2025

Tercer i quart d'ESO

El curiós incident del gos a mitjanit

Orientacions per al professorat

Departament d'Educació i Formació Professional

Subdirecció General de Llengües

Servei de Suports i Recursos Lingüístics

Albert Armenteras Capdevila

Carles Espelt Baixauli

Atès el caràcter docent d'aquesta publicació, per a la citació de fragments de textos d'altri i la reproducció de fotografies procedents d'obres publicades (de les quals se cita adequadament la font i el nom de l'autor) ens acollim al dret de citació reconegut a l'article 32.1 del text refós de la Llei de propietat intel·lectual, aprovat pel Reial decret legislatiu 1/1996, de 12 d'abril, i a l'article 10.2 del Conveni de Berna per a la protecció de les obres literàries i artístiques, de 9 de setembre de 1886. Per tant, està exempta de la necessitat d'autorització i d'abonament dels drets d'autor.



Els continguts d'aquesta publicació estan subjectes a una llicència de Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional de Creative Commons. Se'n permet la còpia, la distribució i la comunicació pública sense ús comercial, sempre que se'n esmenti l'autoria i que la distribució de les possibles obres derivades es faci amb una llicència igual que la que regula l'obra original.

La llicència completa es pot consultar a: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.ca>

Contingut

Introducció	4
La novel·la de ficció	5
<i>El curiós incident del gos a mitjanit</i>	5
Objectiu i estructura de la guia didàctica	6
Abans de la lectura	7
Durant la lectura	8
Després de la lectura	8
Activitats monogràfiques	10
Fórmules de nombres primers	10
Una galàxia espiral de nombres primers	10
Envasos de líquids	11
Forats negres matemàtics	11
Portes, presos, daus i monedes	12
Drecceres aritmètiques	13
Granotes i papallones: cap al caos	13
Problemes de potències de 2	14
El matemàtic que jugava	15
Les aportacions d'Al-Khwarizmi	15
L'equació de tercer grau: fórmula de Cardano	16
El joc dels espies	16
La pregunta preferida de l'examen	17
Aspectes del currículum que es tracten en les activitats	18

Introducció

La modalitat Llegim Ciència forma part del programa El Gust per la Lectura des del curs 2019-20 i ja està plenament consolidada entre els centres que aprofiten les opcions didàctiques que ofereix el programa. Un indicador clar d'aquesta consolidació ha estat el nombre creixent de centres i alumnes que s'han presentat al concurs any rere any.

Aquest curs volem assajar un canvi d'orientació, dins la mateixa filosofia: apropar la modalitat Llegim Ciència a les matemàtiques. Enguany, per tant, ens centrem en un dels àmbits de la competència clau, que en el currículum vigent es concreta com a “competència matemàtica i competència en ciència, tecnologia i enginyeria” (CMCTE).

Es tracta d'un intent complex, perquè les matemàtiques utilitzen llenguatges múltiples, a més del verbal —l'algebraic, l'estadístic, el geomètric...—, i perquè el grau d'abstracció que requereixen determinats sabers que s'aborden en les activitats no sempre tenen una aplicació directa en un context quotidià i, per tant, es fa difícil fer-ne l'eix organitzador d'un projecte o d'una situació d'aprenentatge, al contrari del que passa en la resta d'àmbits de la CMCTE.

Ens sentim avalats pel fet que, mentre s'estava elaborant aquesta guia didàctica, s'ha fet públic el [darrer informe PISA](#) (2022), que mostra una davallada preocupant dels resultats en matemàtiques des de la prova del 2018, i també en lectura i en ciències. És tasca d'experts analitzar els factors que han propiciat aquesta davallada i proposar mesures per revertir-la, però aquí en volem destacar dos aspectes.

En primer lloc, en el document del [marc conceptual per a les matemàtiques](#), PISA esmenta que és necessari que l'alumnat tingui literacitat matemàtica i que pensi matemàticament.¹ Per a això, cal treballar les formes comunicatives pròpies de les matemàtiques, crucials per millorar els resultats.² Pensem que la classe de matemàtiques no es pot reduir a fer operacions o resoldre problemes, sinó que cal ensenyar l'alumnat a comprendre explicacions i demostracions —orals i escrites— sovint complexes, a justificar les solucions, a parlar de matemàtiques... Es tracta, en definitiva, d'apropar l'alumnat a les pràctiques acadèmiques de la comunitat matemàtica.

En aquest sentit, en les activitats proposades per a cada capítol trobareu propostes de lectura i de conversa sobre temes matemàtics.

En segon lloc, destaquem l'apartat que PISA dedica a l'anomenada “ansietat matemàtica”, que incideix de manera inequívoca en els resultats de l'alumnat. Forma part del tòpic pensar que les matemàtiques són difícils i avorrides, i sovint entre l'alumnat adolescent pot arribar a haver-hi prejudicis contra l'assignatura. Per ajudar a desmuntar aquests prejudicis, en diferents parts del quadern es parla de l'actitud personal davant de les matemàtiques i en tots els capítols es proposen converses entre iguals entorn de conceptes matemàtics que s'esmenten en la novel·la. Ens agradaria que, en el curs d'aquestes converses i reflexions compartides, l'alumnat se sentís part d'una comunitat matemàtica, salvant les distàncies. També pot ajudar a facilitar l'apropament a les

¹ En l'original, “*being mathematically literate and thinking mathematically*”.

² Vegeu, en aquest sentit, les recomanacions del Consell d'Europa en el manual [Les dimensions lingüístiques de toutes les matières scolaires](#) (2016).

matemàtiques la trama de la novel·la, que té com a protagonista un noi aficionat a les matemàtiques, de la mateixa edat que els lectors a qui s'adreça.

La necessitat d'impulsar la lectura des de l'edat escolar i aprofitar-la com a eina bàsica d'aprenentatge en totes les matèries és un altre imperatiu de plena actualitat. Tal com explicarem en el pròxim apartat d'aquest document, llegir novel·la a classe de matemàtiques ajuda a potenciar els dos objectius de millora: el de les matemàtiques i el de la lectura.

Amb aquest material, per tant, volem fer una petita aportació al treball integrat de lectura i matemàtiques. És a dir, al gust per la lectura i al gust per les matemàtiques.

La novel·la de ficció

En edicions anteriors de Llegim Ciència hem justificat, partint de la tesi d'Isabel Pau-Custodio³, l'interès d'aprendre ciència a partir de la lectura de novel·les de ficció realista, com una manera de fer que la ciència sigui significativa, rellevant i accessible al públic.

Alguns dels factors que enumera Pau-Custodio també es poden aplicar a l'ús de novel·les a classe de matemàtiques:

- L'alumnat està més habituat a l'estructura narrativa, en la qual els fets o fenòmens es descriuen en l'ordre en què s'han produït. És recomanable, per tant, alternar el text narratiu amb l'expositiu i, al llarg dels cursos, anar tendint del pensament narratiu al científic-expositiu.
- Tots els elements de la lectura estan interconnectats, i això permet que funcionin com una unitat d'imaginació, cosa que en una explicació analítica no és tan fàcil d'aconseguir.
- De manera natural, les narracions porten a fer prediccions sobre el desenllaç final i a desitjar confirmar la predicció. D'aquesta manera el lector manté l'interès.
- Les narracions desperten la implicació emocional (empatia), que està relacionada amb un tipus particular de memòria. Aquestes connexions personals del lector amb el text incrementen l'atenció als continguts conceptuals.
- Donen l'oportunitat de viure l'experiència del descobriment matemàtic a través dels personatges i, en el cas d'*El curiós incident del gos a mitjanit*, d'apropar-nos —i sumar-nos— a l'entusiasme del protagonista pels reptes i enigmes d'aquesta ciència.

El curiós incident del gos a mitjanit

Aquesta novel·la, que ja gairebé és un clàssic, es va publicar en anglès el 2003, s'ha traduït a nombrosos idiomes i es continua reeditant. Per bé que la intenció inicial de l'autor era adreçar-la a adults, és també adient per a lectors de la franja de tercer i quart d'ESO, per l'originalitat de la trama i perquè és amena i fàcil de llegir.

És una història narrada en primera persona per un noi, Christopher Boone, que té un trastorn de l'espectre autista. Aquest fet determina que l'estructura de la novel·la, les descripcions que hi ha, els fets que es prioritzen a l'hora de narrar i les decisions que el protagonista va prenent tinguin un punt de vista insòlit, que ens permet apropar-nos a una visió del món diferent i que va generant

³ Vegeu Pau Custodio, I. (2018). *La novel·la com a context en l'educació científica*. Barcelona: UAB.

situacions, algunes de còmiques, altres d'emotives i altres que propicien l'interès per continuar llegint.

Encara que és fàcil de llegir, hi trobem un estil literari ric, amb esments d'altres llibres —concretament, les novel·les d'Arthur Conan Doyle— i amb reflexions sobre el fet d'escriure, com ara la justificació de la impossibilitat del noi d'emprar metàfores, per raó del seu trastorn.

L'estructura narrativa alterna capítols reflexius —en els quals Christopher parla de temes que el preocupen— amb altres en què la trama avança, a partir de la investigació que decideix emprendre per descobrir qui va matar el gos de la veïna. Al llarg del llibre va plantejant qüestions problemàtiques de caràcter matemàtic. En molts moments hi apareixen gràfics, dibuixos, fotografies, plànols... que ajuden a fer entenedora la trama i els problemes lògics que es planteja el noi.

L'autor, Mark Haddon, va treballar amb persones amb discapacitats físiques i mentals, i això li va permetre dibuixar la forma de ser del protagonista de manera versemblant i fugint dels tòpics sobre la síndrome d'Asperger. També presenta el seu entorn proper, amb una família trencada, en part, per la dificultat de conviure amb un infant amb TEA i d'acceptar les seves reaccions. Haddon diu que no pretenia parlar d'un desordre cognitiu, sinó explorar el potencial literari de les reaccions d'un protagonista *outsider*, que veu el món d'una manera insòlita i sorprenent.⁴

L'autisme que veiem és el d'un noi que en molts aspectes de la vida diària no és autònom, però que, en canvi, té altes capacitats matemàtiques i una forma de raonament i de resolució de problemes que li permet tenir una actitud activa al llarg de la novel·la. Les seves reaccions ens poden divertir o indignar, però en cap moment fer pena.

Per tot plegat, l'aprofitament didàctic del llibre pot anar en tres direccions, que es reflecteixen en els apartats del quadern: podem parlar dels aspectes literaris ("Parlem del llibre"), de la problemàtica relacionada amb els TEA ("Parlem dels trastorns de l'espectre autista") i de les situacions matemàtiques que es van plantejant ("Parlem de matemàtiques"). Per l'orientació del material, aquest darrer apartat és el que té més propostes d'activitat.

Així doncs, pensem que és una recomanació adient per llegir a classe de matemàtiques, o de manera interdisciplinària entre matemàtiques i llengua. Esperem que les propostes d'aquesta guia us siguin d'utilitat per aprofitar la novel·la amb el vostre alumnat.

Objectiu i estructura de la guia didàctica

La proposta del quadern s'adreça a alumnat de tercer i quart d'ESO, per bé que, com que s'ha creat a partir dels temes matemàtics que van apareixent a la novel·la, alguns dels continguts que s'aborden poden tenir una dificultat que depassa aquests nivells. En aquests casos s'ha intentat plantejar les activitats de manera simple, però, tot i així, caldrà seleccionar què decidim treballar.

Com és lògic, el quadern no pretén substituir el material didàctic base del curs, sinó oferir un ventall d'activitats per tal que cada docent en seleccioni les més adients per al seu grup i la seva programació i pugui treballar-les a partir d'una situació engrescadora per a l'alumnat, com és la lectura d'una novel·la amena i adequada a l'edat.

⁴ En l'entrada sobre la novel·la de la [Viquipèdia](#), es diu concretament: "El juliol del 2009, Haddon va escriure al seu blog que 'El curiós incident no és un llibre sobre l'Asperger... en tot cas, és una novel·la sobre la diferència, sobre ser un *outsider*, sobre veure el món d'una manera sorprenent i reveladora. El llibre no tracta específicament de cap trastorn concret', i que ell, Haddon, no és cap expert en l'espectre autista ni en la síndrome d'Asperger."

El quadern s'estructura en els blocs següents:

Abans de la lectura

Les primeres pàgines, com ja és habitual en els quaderns del Gust per la Lectura, acompanyen l'alumnat en la descoberta del llibre, fent que es fixin en el disseny de la coberta, que busquin informació sobre l'autor, i instant-los a fer prediccions sobre el contingut.

En el cas d'aquest quadern, la primera activitat pressuposa que algunes persones del grup potser ja han sentit a parlar del llibre, l'han llegit o n'han vist alguna adaptació teatral. Per tant, pretén activar coneixements previs sobre aquesta novel·la plantejant una pregunta típica de les presentacions de llibres i de les converses literàries. De fet, les preguntes de les quatre primeres activitats tenen aquest plantejament. L'activitat 2 demana que facin prediccions sobre el gènere literari a partir del títol i la 3, també a partir del títol, que anticipin de què tractarà. Quant a l'activitat 4, demana que matisin aquesta anticipació un cop llegida la contracoberta.

L'activitat 5 pretén fer aflorar prejudicis i coneixements erronis sobre l'autisme, que després es contrastaran amb el que n'hagin après a partir de la novel·la i de les petites recerques que s'encarreguen després de la lectura, en l'apartat "Parlem dels trastorns de l'espectre autista".

Les activitats 6 i 8 tenen com a objectiu que l'alumnat esbrini qui és l'autor de l'obra, en quines fonts es pot haver documentat per conèixer els TEA i quin tipus de crítiques li deuen haver fet altres escriptors tenint en compte el seu context. És bo acostumar els lectors joves a tenir present què hi ha darrere de l'obra literària: d'on poua l'autor, quines relacions d'intertextualitat s'estableixen amb altres obres o altres escriptors, quin context justifica l'obra...

L'activitat 8 aprofita l'encàrrec d'una cerca a la Viquipèdia per fer una mirada crítica a les entrades que s'hi troben. Aquesta mirada es fa comparant versions d'una mateixa entrada en diferents llengües i valorant-ne i justificant-ne la fiabilitat.

L'activitat 9 presta atenció a aspectes paratextuals: la numeració dels capítols —de la qual es tornarà a parlar en el tema dels nombres primers—, les diferències entre versions i la funció de les il·lustracions al llarg del llibre.

La primera aproximació als continguts matemàtics és a l'activitat 10, en la qual simplement es demana que cada alumne anoti en una taula què sap dels onze temes matemàtics que s'abordaran. Al final del quadern (apartat "Valora què has après de matemàtiques"), caldrà recuperar aquesta taula i contrastar-la amb el que respondria cadascú un cop completades les activitats, a fi de reflexionar sobre què han après. Aquesta activitat és recomanable fer-la individualment o, com a molt, per parelles, per tal que hi hagi reflexió metacognitiva individual i activació del que sap cadascú. En canvi, la resta d'activitats de l'apartat es poden plantejar com una conversa en gran grup o en grups petits.

Les activitats 11 i 12 tenen com a objectiu preparar la mirada literària sobre el text i, per fer-ho, seguirem l'estratègia de llegir a l'avançada alguns fragments del llibre (en els capítols 2, 3 i 7), per veure'n la forma inusual de descriure, localitzar les reflexions sobre el fet d'escriure i adonar-se del diàleg intertextual entre aquesta novel·la i les de Sherlock Holmes.

Podem aprofitar l'activitat 11 per treballar les diferències entre una descripció literària i una descripció matemàtica, i veure quins passos se segueixen en cada cas.

Durant la lectura

Aquest bloc no conté activitats, sinó que suggereix estratègies per anar recollint, al llarg de la lectura, informació que cada lector pensa que li podrà ser útil i fer-ho d'una manera poc invasiva, que no coarti el desig de continuar llegint. Especialment, se suggereix que dediquin interès a identificar les reaccions d'en Christopher i els recursos literaris que es fan servir al llarg del llibre.

La intenció global de l'apartat és generar desig per llegir, pensant especialment en els lectors febles, per als quals la lectura és poc atractiva... i més si aborda temes de matemàtiques.

Després de la lectura

El gruix de la proposta didàctica és en aquest bloc, que s'estructura en quatre apartats:

- Parlem del llibre
- Parlem dels trastorns de l'espectre autista (TEA)
- Parlem de matemàtiques
- Valora què has après de matemàtiques

L'apartat "**Parlem del llibre**" es pot plantejar com una conversa literària en gran grup, al llarg de la qual comentarem: com són els personatges i quins sentiments ens han despertat, quina estructura té el relat i quines parts s'hi poden identificar, fins a quin punt el títol ens va permetre anticipar l'argument del llibre, en quin gènere literari el podem enquadrar i quines característiques estilístiques té.

Prèviament a aquesta conversa més analítica, podem parlar de l'argument, del que ens ha agradat, de la versemblança de les situacions que planteja... És el moment d'aprofitar les troballes que cada alumne hagi anat marcant al llarg de la lectura i posar-les en comú.

L'apartat "**Parlem dels trastorns de l'espectre autista (TEA)**" conté cinc activitats:

En la primera activitat es pretén dirigir l'atenció al concepte d'**espectre**. És probable que l'hagin sentit referit als espectres d'ona o, en l'ús col·loquial, com a fantasmes. Aquí podem aprofitar per fer adonar l'alumnat del fet que el mateix terme es pot utilitzar amb diferents sentits segons el registre i segons l'àmbit científic. En el cas del TEA, pensar aquesta disfunció en termes d'espectre implica que no ens hem d'imaginar una malaltia amb símptomes definits i característics, sinó una gamma de trastorns del neurodesenvolupament que poden variar d'una persona a una altra i que poden afectar els comportaments, la comunicació i les habilitats socials, però no necessàriament la capacitat intel·lectual; i que el grau d'afectació pot variar des de lleu fins a greu.

La segona activitat complementa aquest punt de vista sobre els TEA aprofitant les anotacions que cadascú ha anat fent al llarg de la lectura. La tercera aporta un altre complement, en aquest cas, la cerca d'informació dirigida a uns canals concrets.

A partir de les conclusions d'aquestes dues activitats, en la següent proposem una conversa, preferiblement en grups petits i posant en comú les conclusions, sobre els prejudicis que hem aconseguit desmuntar i sobre la consideració social i personal vers les persones amb TEA.

L'última activitat consisteix a visionar una entrevista a Julio Manrique en què comenta el muntatge teatral sobre la novel·la que va portar al Teatre Lliure. És una entrevista breu, a partir de la qual podem comentar aspectes com l'ús social de la mentida i el mèrit de la superació personal.

L'apartat "**Parlem de matemàtiques**" conté la major part d'activitats del quadern, distribuïdes en onze temes que s'esmenten al llibre. La nostra proposta se centra en aquests onze, però a la novel·la també se n'esmenten d'altres, que cada docent pot decidir treballar.

Cada tema comença amb una bateria de preguntes que va lligada a un fil de reflexió sobre com es planteja el tema en la novel·la. Les preguntes poden servir per conduir una conversa i, així, fer que l'alumnat parli de matemàtiques, però també es poden treballar com a qüestionaris individuals o de grup. La majoria d'aquestes preguntes s'orienten a activar coneixements matemàtics previs, però també n'hi ha altres de caràcter filosòfic o emocional —perquè el que es diu a la novel·la ho propicia—, altres de relacionades amb la trama, i fins i tot alguna proposta manipulativa o experimental.

A continuació, cada tema conté activitats monogràfiques, amb títol específic, conduïdes de manera seqüenciada i, en alguns casos, en forma d'enigma o de joc de taula:

TEMA	ACTIVITATS
Nombres primers	Fórmules de nombres primers Una galàxia espiral de nombres primers
El volum del cub	Envasos de líquids
Els forats negres i l'existència de Déu	Forats negres matemàtics Quatre-cents noranta-cinc Conjectura de Collatz
Probabilitats	Portes, presos, daus i monedes El problema dels tres presos El joc de les tres targetes La cursa d'obstacles Passem el riu Rimbau i la princesa Boles, daus i monedes
Algoritmes i drecceres	Drecceres aritmètiques Pautes a quadrats i productes Una altra pauta per calcular quadrats Una dreccera per calcular arrels cúbiques
Caos	Granotes i papallones: cap al caos El descobriment de Lorentz
Doblar dosos	Problemes de potències de dos Torre de paper Cadena de cartes Antecessors La torre de Hanoi i la fi del món Balances i pesos La regió perduda Suma de nombres consecutius Els cavallers de la Taula Rodona
Conway	El matemàtic que jugava El problema d'en Christopher
Equacions de segon grau	Les aportacions d'Al-Khwarizmi Mètode geomètric d'Al-Khwarizmi per resoldre equacions de segon grau L'equació de tercer grau: fórmula de Cardano
Rumb	El joc dels espies
Ternes pitagòriques	La pregunta preferida de l'examen

Finalment, l'apartat "**Valora què has après de matemàtiques**" és recomanable treballar-lo individualment o en parella, amb format de coavaluació, i consisteix a contrastar què sabem de cada tema abans de la lectura i què en sabem ara.

Activitats monogràfiques

A continuació comentarem l'orientació de les propostes, el grau de dificultat orientatiu del concepte matemàtic que s'hi aborda i, en alguns casos, si la bateria d'activitats suggereix més d'un nivell de dificultat. Ho indicarem amb la nomenclatura F+ (fàcil), F- (no tan fàcil), D- (una mica difícil) i D+ (difícil).

També trobareu suggeriments sobre el tipus d'agrupament que es pot aplicar i, si escau, enllaços d'interès o materials per proporcionar ajudes a l'alumnat que les hagi de menester.

Fórmules de nombres primers

A partir dels nombres primers es poden plantejar diverses línies de treball. Hem descartat treballar el garbell d'Eratòstenes, que suposem que ja s'ha treballat al llarg de l'ESO i està força explicat a la novel·la. Hem omès també el tema de la criptografia, que requeriria un plantejament d'activitat massa extens.

La nostra opció ha estat desenvolupar una activitat relacionada amb les fórmules. Les activitats estan molt vinculades al treball algebraic i, per tant, poden ser un bon reforç del que s'hagi treballat que hi estigui relacionat: polinomis, equacions...

Tal com diu el protagonista del llibre, els nombres primers són molt lògics, encara que sembli impossible descobrir les regles que els guien. A falta d'una fórmula clara i operativa per obtenir-los, proposem jugar una mica amb algunes expressions que retornen nombres primers dins d'un cert rang de valors. Això es treballa de l'activitat 11 a la 15, en les quals es pregunta a l'alumne sobre la potència real d'aquestes expressions per obtenir nombres primers. Tant a l'activitat 11 com a la 12 es pot assegurar sense necessitat de fer cap càlcul complicat que hi haurà un valor del paràmetre que no donarà un nombre primer. El que no és evident és que per a valors més petits no pugui passar també una cosa semblant sense avaluar l'expressió i comprovar la primalitat del resultat (**F-**). De tota manera, es poden trobar recursos a Internet en què aquestes expressions estan prou analitzades:

- [What is the least possible value of \$n\$ such that \$n^2 + n + 17\$ is composite?](#)
- [To what extent can values of \$n\$ such that \$n^2 - n + 41\$ is composite be predicted?](#)

Les activitats 13 i 14 es poden contestar amb unes mínimes manipulacions algebraiques de les expressions (**D-**). Una mica més complicat pot resultar adonar-se del canvi de variable necessari per obtenir l'expressió demanada a l'activitat 15 (**D+**).

Aquestes cinc activitats es poden treballar individualment o en grups de dues persones, fent parades i demanant els resultats i conclusions a què han arribat per tal de promoure la discussió.

Una galàxia espiral de nombres primers

L'espiral descoberta per casualitat per Stanislaw Ulam ens permet continuar jugant amb algunes d'aquestes estranyes pautes que apareixen en manipular els nombres.

Les activitats 16 i 17 analitzen diverses successions que es poden observar a l'espiral a partir de l'expressió algebraica del seu terme general (**D-**). Per fer aquestes dues activitats, abans cal

estudiar, com s'assenyala al quadern, la tècnica per obtenir el terme general desenvolupada a l'annex que explica el mètode de diferències finites (**F-**).

Recomanem treballar l'espiral en grups de 3-4 alumnes. Aniria bé que, abans de resoldre les activitats, es faci una lectura guiada, dirigida pel docent, del mètode de diferències finites explicat a l'annex, per tal que els grups vagin descobrint aquest mètode.

Envasos de líquids

A partir de l'observació del protagonista sobre la forma cúbica del calabós on l'han reclòs, proposem una reflexió sobre les formes dels envasos de bric i les possibles raons d'estalvi que determinen escollir unes proporcions determinades per part dels fabricants. Com que es tracta d'una activitat dirigida i amb moltes tasques, recomanem que es plantegi com una situació d'aprenentatge / petit projecte per a grups de 3-4 persones, en la qual s'hauria d'arribar a conclusions, exposar-les i justificar-les en un informe que contingui tots els càlculs i gràfiques que es demanen.

Podem proporcionar una estructura bàsica d'informe, si és un gènere que no s'ha treballat mai a classe de matemàtiques:

- Pregunta que ens hem fet
- Procés que hem seguit
- Resultats
- Conclusions

Les activitats 8 i 9 estan centrades especialment en la quantitat de material necessari per confeccionar un envàs típic d'un litre. Partint d'una amplada ja fixada (que més endavant es veurà que és l'òptima), buscarem el valor de les altres dues dimensions que ens permetran una despesa mínima de cartró (**F-**). És recomanable, a l'hora de dibuixar la gràfica, ajudar-se de la rapidesa i facilitat d'interpretació que ens proporciona GeoGebra.

L'activitat 10 es pregunta sobre la veracitat d'una informació comercial que podem comprovar més o menys intuïtivament amb una mica d'investigació sobre volum i proporció mitjana de suc en una taronja (**F-**).

A l'activitat 11 ampliem el càlcul de l'àrea mínima per a altres envasos amb forma de prisma rectangular. Amb un plantejament similar a les activitats 8 i 9, proposem dibuixar les gràfiques de l'àrea en funció de x per diferents valors de z . Si ho fem en els mateixos eixos, podrem comparar fàcilment les funcions i els seus mínims. La conclusió final serà que l'amplada que havíem considerat al començament del capítol era, de fet, la més econòmica. Com en el cas anterior, l'ús de GeoGebra pot facilitar molt les coses (**F-**).

Forats negres matemàtics

Les activitats purament matemàtiques d'aquest capítol són més aviat descriptives. L'alumnat bàsicament haurà de seguir les instruccions per arribar a diferents menes de forats negres, ja siguin un nombre concret, diversos nombres o remolins (cicles de nombres que es repeteixen indefinidament).

Seguir els passos i fer les operacions que es demanen pot ser una activitat entretinguda que requereix una certa atenció, però en cap cas és difícil (**F+**). Intentar respondre a alguns

suggeriments que es fan sobre les possibles raons del perquè d'aquests comportaments dels nombres ja pot tenir un grau de dificultat força més elevat (**D-** de mitjana). En funció del nivell del grup, es pot acceptar una explicació intuïtiva sense raonaments rigorosos.

Les activitats 5, 6 i 7 es poden fer individualment, amb una posada en comú en gran grup en acabar. La resta (8 a 13) es poden distribuir en grups, vetllant per assignar les més difícils als grups amb més competència, de manera que un cop treballades cada grup n'exposi els resultats i es generi una discussió coordinada pel docent.

Per ampliar informació i trobar més activitats sobre aquest tema, podeu consultar un dels articles en què ens hem basat: ALEGRÍA, P. (2007). "[Magia y agujeros negros](#)", a: Sigma, 30. Universidad del País Vasco.

Portes, presos, daus i monedes

En general, en les activitats incloses en aquest apartat és molt important complementar els raonaments teòrics amb el disseny d'experiments i l'obtenció dels resultats corresponents.

Primer caldrà tornar a llegir l'explicació que fa en Christopher al llibre sobre el problema de Monty Hall i sumar-hi l'explicació complementària de la pàgina 27 del quadern. Un element d'aquesta explicació que facilita la comprensió del problema és l'extrapolació a moltes més portes per tal de veure més intuïtivament la validesa d'un resultat en principi desconcertant (**F-**).

Un cop comentada aquesta doble lectura, treballarem les activitats 11 a 16 en grups de 3-4 alumnes i, a continuació, ho debatrem tot en gran grup, sota la coordinació del docent, que haurà de fer d'advocat del diable, plantejant preguntes o objeccions que portin l'alumnat a qüestionar-se les conclusions a què han arribat per tal d'avançar cap a un coneixement més madur.

L'activitat 11 proposa el disseny d'un experiment similar al de Monty Hall per tal de comprovar a la pràctica el que ens assenyalava la teoria (**F+**).

A partir de l'espai mostral que es genera en triar una porta, l'activitat 12 convida a justificar la fórmula apuntada al llibre i la seva interpretació (**D-**).

"El problema dels tres presos" (activitats 13 i 14) presenta força similituds amb el de Monty Hall, però com que no hi ha tria posterior, el resultat és prou diferent. Es proposa també fer-ne la comprovació experimental (**F-**).

A "El joc de les tres targetes" (activitats 15 i 16), la probabilitat real també és diferent de la que podria semblar a primera vista, per bé que pensant una mica es fa evident el valor correcte; per corroborar aquesta reflexió, l'activitat suggereix una prova experimental. Igual com fa el quadern a l'activitat 11, aquí podem recomanar a l'alumnat que repeteixin l'operació uns quants cops per tal que es manifesti la tendència (**F-**).

La resta d'activitats es poden fer en grup sense intervenció del docent i, en acabar, es poden posar en comú o bé es pot presentar un informe de conclusions, que seria interessant que fos individual per detectar el grau de comprensió de cada alumne.

“La cursa d'obstacles” (activitats 17 i 18) consisteix en un joc de taula amb daus i fitxes en el qual cal avaluar una probabilitat senzilla en cada pas per tal de triar el camí que ens assegurarà més sovint guanyar la cursa (**F-**).

“Passem el riu” (activitats 19 i 20) és un altre joc per a dues persones amb llançament de daus. Les condicions inicials del joc les pot triar cada jugador, i una bona estratègia serà fer-ho d'acord amb l'anàlisi de probabilitats. El joc pot ser força distret, ja que no és immediata la tria d'una posició òptima de sortida (**D-**).

“Rimbau i la princesa” (activitat 21) és una divertida història de prínceps i laberints amb tigres afamats en què les matemàtiques de la probabilitat ens poden ajudar a trobar el camí més idoni (**F+**).

En les tres darreres activitats fem ús dels elements més recurrents en el món dels estudis de probabilitats: les boles de colors (activitat 19) (**F-**), els daus (20) (**F-**) i les monedes (21) (**F-**).

Drecceres aritmètiques

Comencem (activitat 10) proposant una multiplicació similar a la que fa mentalment en Christopher al capítol 104, per a la qual es demana que la solucionin d'una manera semblant a com ho fa ell (**F-**).

Introduïm, a continuació, deu trucs basats en la manera com escrivim els nombres i en les lleis aritmètiques, que ens poden permetre fer més fàcils les operacions bàsiques de sumar, restar, multiplicar o dividir sense calculadora. Recomanem comentar totes aquestes drecceres amb el grup classe seguint l'explicació del quadern. Per tal de practicar-los, a l'activitat 11 hi ha un seguit d'exercicis de càlcul que es poden resoldre amb l'ajut de tot el que s'ha explicat. Aquests exercicis tenen poca dificultat i, per tant, es poden fer individualment, i així propiciarem la creativitat i la iniciativa de cada alumne. Els exercicis estan col·locats en el mateix ordre que els trucs d'ajut explicats que hi poden anar bé (**F-**). El docent pot incentivar que l'alumnat n'ideï altres i els comparteixi amb la resta del grup. És important que el docent vetlli perquè l'alumnat no utilitzi calculadora ni els algorismes habituals, sinó que apliqui els trucs descrits o en desenvolupi de propis.

Les activitats que segueixen tenen més complexitat, però podem continuar treballant individualment o bé per parelles heterogènies, per garantir el suport entre iguals:

- A les activitats 12 i 13 descobrim una pauta que segueixen els quadrats de nombres acabats en 5, la qual ens permet una dreccera per calcular-los (**F-**). Aquesta dreccera la podem estendre a tota una sèrie especial de productes (activitats 14 i 15) (**D-**).
- A les activitats de la 16 a la 19 s'introdueix i es desenvolupa una nova pauta per calcular quadrats basada en una de les identitats notables de l'àlgebra, i a l'activitat 20 se'n proposen uns exercicis d'aplicació (**D-**).
- Acabem el tema (activitats 21 i 22), amb una dreccera molt potent per calcular l'arrel cúbica de qualsevol cub perfecte (**F+**).

Granotes i papallones: cap al caos

A partir dels apunts d'en Christopher sobre la població de granotes, amb aquestes activitats pretenem oferir a l'alumnat un primer contacte amb la teoria del caos, una branca força moderna de

les matemàtiques. Són propostes complexes i difícils i s'hauran de treballar sense córrer. En tractar-se en la majoria dels casos de processos recurrents, per observar-ne l'evolució a llarg recorregut el tractament informàtic és pràcticament imprescindible, i serà molt important el treball experimental tant pel que s'ha d'observar com pel que s'ha de fer.

Comencem estudiant d'on surt l'equació sobre l'evolució de les poblacions animals en la qual es basa el contingut d'aquest capítol 151. Per passos, anem introduint el raonament que ens condueix a l'expressió definitiva del que se'n diu "equació logística". Un parell d'activitats (9 i 10) haurien d'ajudar a fixar i entendre el procés deductiu cap al resultat final (**D-**).

Una vegada obtinguda l'equació, el que la fa realment interessant és que la lògica evolutiva obliga que es vagi iterant en cada període de temps considerat. El comportament de la successió a llarg termini ens proporcionarà, doncs, un model de l'evolució de la població. A més, petits canvis en la població inicial o en el paràmetre de creixement ens conduiran a resultats sovint sorprenents.

Tot això es visualitza i es treballa per mitjà de quatre activitats d'exploració (11 a 14) basades en el que podem observar amb l'ajut de tres *applets* de GeoGebra. Les activitats poden arribar a ser força distretes, i més si aconseguim que l'alumnat visualitzi el que realment està modelitzant: com pot ser l'evolució d'una població al llarg dels anys (**F-**).

Acabem el capítol presentant el descobriment accidental de Lorentz del que ell mateix va batejar com a "efecte papallona". Experimentem una mica el que poden ser aquests sistemes caòtics en l'activitat 15, iterant una funció senzilla. L'ideal seria fer-ho a l'ordinador amb un full de càlcul, per rapidesa i per presentació de resultats. També és possible utilitzar una calculadora, tot i que el procés és més feixuc. Una alternativa és organitzar un "duel de calculadores": fer el procés amb dues calculadores científiques de diferent precisió i contrastar els resultats. De (**F-**) a (**D-**), depenent del domini que es tingui de l'eina informàtica.

Suggerim que les activitats de la 9 a la 14 es facin individualment i la 15 en grups de 3-4 persones.

Problemes de potències de 2

El contingut de les activitats matemàtiques d'aquest apartat s'explica clarament en el títol. Tot el que segueix es pot resoldre considerant d'alguna manera les potències de 2. En algunes, més que de resoldre res, es tracta de constatar la rapidesa amb què pot créixer una xifra (encara que sigui la més baixa) en sotmetre-la a aquesta operació. En d'altres, cal trobar com podem fer encaixar aquesta mena de potències per tal que ens facilitin la clau per solucionar el problema que es planteja.

Les tres primeres activitats: "Torre de paper" (11), "Cadena de cartes" (12) i "Antecessors" (13) entrarien plenament dins la categoria del creixement desmesurat (**F+**). Són relativament senzilles i tenen com a objectiu entendre què és el creixement exponencial. Poden generar discussions interessants de tot el grup.

"La Torre de Hanoi" (14) és el pont cap al segon tipus de problema, ja que requereix una certa investigació per detectar que l'avaluació del nombre de moviments depèn de les potències de 2 (**F-**). En aquesta activitat es pot demanar que l'alumnat hi aprofundeixi intentant una justificació.

Les activitats de l'11 a la 14 es poden proposar com a tasques individuals, o bé es pot aplicar la tècnica cooperativa 1-2-4 per contrastar els resultats. Les activitats següents (15 a 18) són més complexes i es recomana fer-les en grups de 3-4 alumnes per garantir el suport entre iguals.

“Balances i pesos” (15) ja requereix una reflexió més profunda, especialment la segona pregunta (que serien potències de 3) (**D-**). També admet diferents ampliacions, que trobareu al llibre del qual hem extret l'activitat: GARDNER, M. (2009). *¡Ajá! Inspiración. Matemáticas que estimulan la creatividad*. Barcelona: Editorial RBA.

“La regió perduda” (16) té un enfocament una mica marginal: intenta fer patent que de vegades ens sembla detectar un patró en l'evolució d'un problema que, més endavant, es confirma com una suposició errònia (**D-**). En [aquest enllaç](#) podem trobar el problema completament estudiat.

“Suma de nombres consecutius” (17) explora quins nombres poden ser sumes de nombres naturals consecutius (nombres trapezoidals) i quins no poden ser-ho (potències de 2). Arribar a aquesta intuïció pot ser fàcil, trobar-ne la raó i aventurar patrons és una tasca força més difícil (**D**). En [aquest enllaç](#) (en francès) teniu el problema totalment estudiat.

El darrer problema, “Els cavallers de la taula rodona” (18), parteix d'un plantejament molt fàcil, i la solució és clara quan s'hi arriba, però cal tenir una certa inspiració per trobar la idea que relaciona el problema amb les potències de 2 (**D+**). Ajuda a arribar-hi pensar que quan l'espasa passa per sobre d'un cavaller per matar el que el segueix, el cavaller salvat passa a ser el primer d'una altra sèrie de cavallers.

El matemàtic que jugava

I nosaltres també jugarem. Aquesta activitat és curta i senzilla: s'ha restringit a la descripció del treball de J. H. Conway, matemàtic de primera fila traspasat el 2020, que es va interessar en molts camps de les matemàtiques. Aquí se'n descriu un joc: els soldats de Conway.

Es pot llegir el text i la descripció del joc en gran grup. A continuació, l'activitat 4 es pot assignar individualment. En aquesta activitat apuntem les configuracions inicials mínimes per arribar als quatre primers nivells i proposem trobar els moviments necessaris per aconseguir-ho a partir d'aquelles (**F+**). Podem advertir l'alumnat que no perdin massa temps intentant portar un soldat més enllà del quart nivell...

Com a recurs complementari, a l'activitat 5 incloem un enllaç per jugar als soldats de Conway amb una aplicació interactiva.

Al quadern informem que es pot completar l'estudi del joc, però ho deixem a criteri de cada docent, i indiquem la font on es pot trobar: TANTON, J. (2018). *¡Resuélvelo!: Retos lúdicos para curiosos de las matemáticas*. Real Sociedad Matemática Española. Editorial SM. També es pot treballar un altre joc, com [el joc de la vida](#), prou conegut.

Les aportacions d'Al-Khwarizmi

El conjunt d'activitats d'aquest tema està orientat a descobrir fórmules per a les equacions de segon i tercer grau dins d'un marc històric i geomètric, però combinant el context clàssic amb el llenguatge més modern.

Al-Khwarizmi va ser el primer a generalitzar i sistematitzar un mètode geomètric per resoldre equacions de segon grau que ja era conegut pels babilonis i els grecs. Intentem explicar aquest mètode primordial seguint el pensament i les paraules del seu autor.

- A l'activitat 14 es demana intentar solucionar una equació a partir de la manera de solucionar-la que va deixar escrita Al-Khwarizmi (**D+**).
- Responem de manera gràfica a les preguntes plantejades a l'activitat interior i proposem fer-ho amb altres equacions (activitats 15, 16 i 17) (**D+**).
- Les activitats 18 i 19 intenten una certa generalització del mètode, introduint paràmetres algebraics i a partir de la forma general d'una equació de segon grau (**D+**).
- Acabem proposant a l'alumne (20) que intenti explicar amb les seves paraules aquest mètode geomètric de resolució (tal com ho va fer Al-Khwarizmi en els seus escrits) (**D+**).

És un conjunt d'activitats difícils. Per això, l'alumnat que no hagi treballat la deducció de l'equació de segon grau —que pot molt ben ser, especialment a tercer d'ESO— i a qui únicament se li hagi fet memoritzar i aplicar la fórmula, pot aturar-se aquí. Els que ja la coneguin poden fer-les també per entendre què significa la compleció de quadrats, i a continuació ampliar-ho amb les activitats de la 21 a 27, que menen a la fórmula de Cardano.

Suggerim que les activitats es treballin en grups de 2-3 alumnes i que el docent vagi interactuant amb els grups, resolent dubtes i proporcionant ajudes... Si està prevista la codocència, es poden fer dos grups homogenis, d'acord amb el que hem dit en el paràgraf anterior.

L'equació de tercer grau: fórmula de Cardano

S'expliquen totes les etapes que marquen el procés de resolució de l'equació de tercer grau que va publicar Cardano a la seva obra *Ars Magna*, juntament amb uns petits afegits deguts a Bombelli, i les transformacions que cal fer per passar de l'equació general cúbica a la mena d'equacions amb què treballava Cardano. Les activitats de la 21 a la 27 estan concebudes com d'acompanyament en diverses fases dels raonaments (**D+**).

El joc dels espies

L'activitat matemàtica d'aquest capítol entrena la situació i orientació sobre un mapa a través d'una simulació en format de joc individual.

Comencem descrivint el terreny de joc o camp d'operacions, on situarem els nostres espies en unes coordenades donades (activitat 10). Passem, després, a definir el concepte de rumb com a angle que forma una direcció respecte al nord magnètic. L'activitat 11 entrena aquest concepte calculant el rumb relatiu entre les posicions d'alguns dels espies (**F+**).

El joc en si es desenvolupa a l'activitat 12, en la qual s'han de processar les dades que envien els espies sobre la situació d'algunes instal·lacions estratègiques del territori. L'encreuament de totes aquestes dades ha de permetre localitzar de manera precisa cada una d'aquestes instal·lacions (**F-**).

Com diem al quadern, és possible jugar al joc de manera manual amb eines de dibuix o amb ordinador, amb GeoGebra o aplicacions similars.

S'haurien de llegir els conceptes teòrics relatius a l'orientació en gran grup per poder resoldre dubtes i aclarir dificultats, perquè és molt probable que no ho hagin vist abans. Com que cal fer representacions acurades, es recomana que l'activitat es faci per parelles. L'alumnat més destre amb la trigonometria la podrà utilitzar per obtenir resultats més acurats. Altrament, es podrà fer de manera intuïtiva prenent mesures directes sobre el dibuix que hagin fet.

Es pot tancar l'activitat amb una conversa en gran grup, que pot proporcionar un reforç lúdic ("a veure qui ha encertat més posicions").

La pregunta preferida de l'examen

L'apèndix que ha escrit en Christopher per al seu llibre comentant la pregunta preferida ens permet fer una disquisició sobre aquesta mena de demostracions i una discussió final sobre què són les ternes pitagòriques.

Comencem seguint els raonaments que ha fet el noi per resoldre el problema i provant d'explicar-los. Primer, per decidir les llargades relatives dels costats donats, algebraicament (activitat 18) i gràficament (19) (**F+**). A partir d'aquí, en Christopher demostra que el triangle és rectangle, però no pel teorema de Pitàgores, com diu el llibre, sinó pel seu recíproc. N'expliquem la diferència, assenyalant que no sempre un implica l'altre. A l'activitat 20 es demana buscar demostracions tant del teorema de Pitàgores com del seu recíproc (**D-**). A l'activitat 21 s'enuncien set suposats teoremes dels quals cal donar una demostració si són certs, i el mateix per als seus recíprocs o un contraexemple que ho desmenteixi (**D+**).

En la segona part d'aquest capítol introduïm el concepte de terna pitagòrica, i la resta d'activitats van dirigides a cercar fórmules que generin totes les ternes pitagòriques primitives (22) (**F+**). En concret, les buscarem a la taula de multiplicar de dues entrades (23) (**F+**).

Les activitats següents (24 a 28) estan destinades a trobar les raons algebraiques per justificar-ho, les quals ens donaran, de retruc, fórmules per obtenir noves ternes (**D-**).

Acabem amb una altra manera de generar ternes pitagòriques a partir de fraccions i intentar esbrinar per què funciona (29) (**D-**).

Aquest grup de tasques és bastant difícil, alhora que ric en contingut algebraic i en la seva relació amb la metodologia matemàtica (teoremes). Les activitats 18 i 19 són pròpies del treball habitual en aquests nivells i es poden fer individualment o en parelles. En les activitats 20 i 21 es fila més prim i es recomana fer-les en grups de 3-4 alumnes, amb el docent interactuant amb els grups i conduint la posada en comú posterior per tal de generar discussions que ajudin a clarificar les idees. La resta d'activitats es poden treballar en grups de dos i coavaluar ajuntant dues parelles.

Aspectes del currículum que es tracten en les activitats

Hem resumit en les taules següents les competències específiques i els sabers que s'aborden al llarg de les activitats.

COMPETÈNCIES ESPECÍFIQUES	CE 1	CE 2	CE 3	CE 4	CE 5	CE 6	CE 7	CE 8	CE 9
Nombres primers									
El volum del cub									
Els forats negres									
Probabilitats									
Algoritmes i drecceres									
Caos									
Doblar dosos									
Conway									
Equacions de segon grau									
Rumb									
Ternes pitagòriques									

SABERS	Sentit numèric	Sentit de la mesura	Sentit espacial	Sentit algebraic	Sentit estocàstic	Sentit socio-emocional
Nombres primers						
El volum del cub						
Els forats negres						
Probabilitats						
Algoritmes i drecceres						
Caos						
Doblar dosos						
Conway						
Equacions de segon grau						
Rumb						
Ternes pitagòriques						