

45

Documents

**Marc conceptual
de la competència
matemàtica.**

PISA 2021



Consell Superior
d'AVALUACIÓ
del Sistema Educatiu

45

Documents

**Marc conceptual
de la competència
matemàtica.**

PISA 2021



URL: www.gencat.cat/ensenyament



Aquest llibre està publicat amb una llicència Creative Commons Reconeixement-No comercial Compartir igual 3.0 Espanya.

Per veure'n una còpia, visiteu: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.ca>

Els termes de la llicència impliquen que aquest material pot ser:

- reproduït, distribuït i comunicat públicament sempre que se'n reconegui l'autoria;
- reproduït, distribuït i comunicat públicament sempre que l'ús no sigui comercial, i
- utilitzat per generar una obra derivada sempre que aquesta quedi subjecta a una llicència idèntica a aquesta.

Marc conceptual de la competència matemàtica. PISA 2021

Aquest document és la traducció de *PISA 2021 Mathematics Framework*, publicat per l'OCDE al novembre de 2018

© Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu
Departament d'Educació
Generalitat de Catalunya

Barcelona, juny 2020

ÍNDIX

INTRODUCCIÓ	3
1. DEFINICIÓ DE LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA	7
Una visió dels individus competents matemàticament a PISA 2021	9
Un enllaç explícit a una varietat de contextos per a problemes a PISA 2021	14
Un paper visible per a les eines matemàtiques, inclosa la tecnologia, a PISA 2021	14
2. ORGANITZACIÓ DEL DOMINI	16
Raonament matemàtic i processos de la resolució de problemes	17
Coneixements de contingut matemàtic	26
Contextos per als ítems d'avaluació i les habilitats seleccionades del segle XXI	34
3. AVALUACIÓ DE LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA	39
Estructura de l'avaluació matemàtica a PISA 2021	39
Distribució desitjada de la puntuació del raonament matemàtic i del procés de resolució de problemes	39
Distribució desitjada de la puntuació segons la categoria de contingut	40
Rang de dificultat dels ítems	40
Avaluació de les matemàtiques basada en ordinador	44
Disseny dels ítems de matemàtiques de PISA 2021	46
Puntuació de l'ítem	48
Informació dels resultats de la competència matemàtica	48
La competència matemàtica i els qüestionaris de context	49
4. RESUM	53
5. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES	54
ANNEX A. EXEMPLES IL·LUSTRATIUS	57
ÚS DE TELÈFONS INTEL·LIGENTS	58
LA BELLESA DE LES POTÈNCIES	65
SEMPRE A VEGADES MAI	70
ENREJOLAT	76
DECISIÓ DE COMPRA	85
NAVEGACIÓ	93

SIMULACIÓ D'ESTALVIS..... 101

INTRODUCCIÓ

1. L'avaluació de les matemàtiques té una importància particular per a PISA 2021, ja que torna a ser la competència principal, com ho va ser al 2003 i al 2012. Encara que també va ser avaluada a PISA 2000, 2006, 2009, 2015 i 2018, només va ser el domini principal de l'avaluació al 2003 i 2012.
2. El retorn de les matemàtiques com a domini principal a PISA 2021 ofereix l'oportunitat de continuar fent comparacions en el rendiment de l'estudiant al llarg dels anys així com de reexaminar allò que s'ha d'avaluar tenint en compte els canvis que s'han produït al món i en les pràctiques i polítiques educatives.
3. Cada país té una visió de la competència matemàtica i n'organitza l'estudi per aconseguir un resultat esperat. Històricament, la competència matemàtica abastava l'assoliment de les habilitats o operacions aritmètiques bàsiques, sumar, restar, multiplicar i dividir nombres sencers, decimals i fraccions; calcular percentatges; i calcular l'àrea i el volum de formes geomètriques simples. Actualment, la digitalització de molts aspectes de la vida, la ubiqüitat de les dades per prendre decisions personals relacionades amb la salut i les inversions, així com els grans reptes socials com ara el canvi climàtic, els impostos, el deute governamental, el creixement de la població, l'extensió de les malalties pandèmiques i l'economia global, han redefinit el que significa ser matemàticament competent i estar ben preparats com a ciutadans compromesos i reflexius del segle XXI.
4. Els problemes acabats d'enumerar, així com d'altres als quals s'enfronta la societat a tot el món, tenen un component quantitatiu. Comprendre'ls, així com abordar-los, almenys en part, requereix pensar matemàticament. Aquest pensament matemàtic en contextos cada cop més complexos no es basa en la reproducció dels procediments de càlcul bàsics esmentats abans, sinó que es basa en el raonament (tant deductiu com inductiu).¹ El paper important del raonament exigeix una reconsideració del que significa que els estudiants siguin competents en matemàtiques. A més de la resolució de problemes, aquest marc conceptual argumenta que la competència matemàtica al segle XXI inclou el raonament matemàtic i alguns aspectes del pensament computacional.
5. Avui dia, els països s'enfronten a noves oportunitats i reptes en tots els àmbits de la vida, molts dels quals provenen de la ràpida evolució d'ordinadors i dispositius com ara robots, telèfons intel·ligents i màquines en xarxa. Per exemple, la gran majoria dels adults joves i d'estudiants que van començar la universitat després de 2015 sempre han considerat que els telèfons són dispositius mòbils portàtils capaços de compartir veu, textos i imatges i accedir a Internet, capacitats vistes com a ciència ficció per molts dels seus pares i, certament, per tots els seus avis (Beloit College, 2017). El

¹ En aquest marc conceptual, les referències al raonament matemàtic assumeixen un raonament tant de tipus matemàtic (deductiu) com estadístic (inductiu).

reconeixement de la creixent discontinuïtat contextual entre el segle passat i el futur ha impulsat una discussió sobre el desenvolupament de les habilitats del segle XXI en els estudiants (Ananiadou i Claro, 2009; Fadel, Bialik i Trilling, 2015; National Research Council, 2012; Reimers i Chung, 2016).

6. És aquesta discontinuïtat la que també impulsa la necessitat d'emprendre reformes educatives i el repte d'aconseguir-ho. Periòdicament, els educadors, els responsables de les polítiques educatives i d'altres agents interessats revisen els estàndards i les polítiques de l'educació pública. En el decurs d'aquestes deliberacions es generen respostes noves o revisades a dues preguntes generals: 1) Què necessiten els estudiants per aprendre? i 2) Quins estudiants necessiten saber què? L'argument més utilitzat en defensa de l'ensenyament de les matemàtiques per a tots els estudiants és la seva utilitat en diverses situacions pràctiques. Tanmateix, aquest argument es fa més feble amb el temps: moltes activitats simples s'han automatitzat. Durant molt de temps, els cambrers dels restaurants sumaven i multiplicaven en paper per calcular el preu que s'havia de pagar. Avui només premem els botons dels dispositius de mà. No fa massa que la gent usava horaris impresos per planificar viatges; això requeria una bona comprensió de l'eix temporal i de les diferències, a més de la capacitat d'interpretar taules complexes bidireccionals. Avui fem una consulta directa a Internet.
7. Quant a la qüestió de "què ensenyar", sorgeixen molts malentesos per la manera com es concep la matemàtica. Moltes persones veuen que les matemàtiques no són més que una caixa d'eines útil. Un seguiment clar d'aquest enfocament és evident en els plans d'estudi escolars de molts països. De vegades es limiten a una llista de temes o de procediments de la matemàtica, i demanen als estudiants que en practiquin uns quants, en situacions predictibles (sovint amb una prova). Aquesta perspectiva de les matemàtiques és massa simple per al món actual. Passa per alt característiques clau de les matemàtiques que creixen en importància. Malgrat l'anterior observació, hi ha un nombre creixent de països que posen èmfasi en el raonament i en la importància dels contextos rellevants en els seus currículums. Potser l'exemple d'aquests països servirà de model útil per a d'altres.
8. En definitiva, la resposta a aquestes preguntes és que cada estudiant ha d'aprendre (i tenir l'oportunitat d'aprendre) a pensar matemàticament, utilitzant el raonament matemàtic juntament amb un petit conjunt de conceptes matemàtics fonamentals que donen suport a aquest raonament i que, no necessàriament, s'ensenyen explícitament, sinó que es manifesten i es reforcen a través de les experiències d'aprenentatge de l'estudiant en matemàtiques. Aquest plantejament proporciona als estudiants un marc conceptual per abordar les dimensions quantitatives de la vida al segle XXI.
9. El marc conceptual de PISA 2021 està dissenyat per fer més clara i explícita la rellevància de les matemàtiques per als estudiants de 15 anys, alhora que es garanteix que els ítems desenvolupats es mantinguin en contextos significatius i autèntics. El cicle de modelatge matemàtic, utilitzat en marcs anteriors (per exemple, OCDE 2004; 2013) per descriure les etapes que

superen els individus en la resolució de problemes contextualitzats, segueix essent un element clau del marc conceptual de PISA 2021. S'utilitza per ajudar a definir els processos matemàtics en què els estudiants s'impliquen a mesura que resolen problemes-processos que, juntament amb el raonament matemàtic (deductiu i inductiu), proporcionaran les dimensions principals.

10. Per a PISA 2021, l'Avaluació de les Matemàtiques Basada en l'Ordinador (CBAM) serà el principal mode d'aplicació de l'avaluació de la competència matemàtica. No obstant això, els instruments d'avaluació basats en paper es proporcionaran als països que decideixin no avaluar els estudiants per ordinador. El marc conceptual s'ha actualitzat per reflectir també el canvi en el mode d'aplicació, ja introduït el 2015, incloent-hi la discussió sobre les consideracions que haurien d'informar del desenvolupament dels ítems de CBAM. Aquesta serà la primera actualització important del marc matemàtic, des de la introducció a PISA de l'avaluació aplicada amb l'ordinador.
11. El marc conceptual de PISA 2021 té en compte l'expectativa de l'OCDE que hi haurà un augment de la participació a PISA de països de renda baixa i mitjana. El marc de PISA 2021 reconeix la necessitat d'augmentar la resolució dels ítems de PISA classificats a la part inferior de l'escala de rendiment, partint del desenvolupament del marc conceptual de PISA (OCDE, 2017b) quan s'estava preparant l'avaluació; també reconeix la necessitat d'ampliar la part inferior de l'escala de rendiment; la importància de capturar un ventall més ampli de contextos socials i econòmics; i la previsió d'incorporar una avaluació d'estudiants no escolaritzats de 14 a 16 anys.
12. El paper creixent i evolutiu dels ordinadors i de les eines informàtiques tant en la vida quotidiana com en els contextos de resolució de problemes de competència matemàtica es reflecteix en el marc conceptual de PISA 2021, reconeixent que els estudiants han de posseir —i ser capaços de demostrar-les— habilitats de pensament computacional a mesura que s'apliquen a les matemàtiques com a part de la seva pràctica de resolució de problemes. Les habilitats de pensament computacional inclouen el reconeixement de patrons, el disseny i l'abstracció, la descomposició del patró, la determinació de quines (si és que existeixen) eines informàtiques es podrien utilitzar per analitzar o resoldre un problema i definir algoritmes com a part d'una solució detallada. En plantejar la importància del pensament computacional, aplicat a les matemàtiques, el marc conceptual preveu una reflexió dels països participants sobre el paper del pensament computacional en els currículums i la pedagogia de les matemàtiques.
13. El marc de matemàtiques PISA 2021 s'organitza en tres parts principals. La primera part, "Definició de la competència matemàtica", explica els fonaments teòrics de l'avaluació de les matemàtiques a PISA, incloent la definició formal del constructe de la competència matemàtica. A la segona part, "Organització del domini", es descriuen quatre aspectes: a) el raonament matemàtic i els tres processos matemàtics (del cicle de modelització/resolució de problemes); b) la manera d'organitzar el coneixement de contingut matemàtic en el marc conceptual de PISA 2021 i el coneixement del contingut rellevant per a una avaluació dels estudiants de 15 anys; c) la relació entre la

competència matemàtica i les anomenades habilitats del segle XXI; i d) els contextos en què els estudiants afrontaran reptes matemàtics. A la tercera part, "Avaluació de la competència matemàtica", s'exposen problemes estructurals sobre l'avaluació, incloent-hi un model de prova i altra informació tècnica.

14. Amb l'objectiu de garantir la preservació de la tendència de resultats, la majoria dels ítems del PISA 2021 seran ítems que s'han utilitzat en anteriors avaluacions PISA. Hi ha una gran col·lecció d'ítems alliberats basats en els marcs conceptuals anteriors a l'adreça <http://www.oecd.org/pisa/test>. L'annex A inclou set ítems il·lustratius que intenten mostrar els elements més importants del marc conceptual de PISA 2021.
15. El marc conceptual del 2021 va ser redactat sota l'orientació del grup d'experts en matemàtiques (MEG), un organisme designat pels responsables de PISA per a la redacció del marc conceptual de matemàtiques (RTI International), en consulta amb el consell de govern de PISA (PGB). Els vuit membres del MEG inclouen matemàtics, estadístics, educadors en matemàtiques i experts en investigació en avaluació, tecnologia i educació de diversos països. Els MEG van comptar, a més, amb el suport d'un grup extensiu de MEG (eMEG), format per deu experts que actuaven com a revisors col·laboradors de la versió creada pel MEG. L'eMEG va incloure experts de diferents països amb una àmplia experiència en matemàtiques. Experts dels més de 80 països que constitueixen la Junta de Govern de PISA van dur a terme revisions addicionals. RTI International, contractada per l'Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic (OCDE), ha dut a terme dues activitats de recerca: una enquesta de validació presencial entre educadors, universitats i empresaris; i un laboratori cognitiu amb joves de 15 anys de diferents països per obtenir comentaris dels estudiants sobre els exemples mostrats en el marc conceptual. El treball del MEG per a PISA 2021 es basa en versions anteriors del marc conceptual de matemàtiques de PISA i incorpora les recomanacions del grup d'assessorament estratègic de matemàtiques convocat per l'OCDE el 2017.

1. DEFINICIÓ DE LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA

16. La comprensió de les matemàtiques és fonamental per a la preparació d'un jove per participar a la societat moderna i contribuir-hi. Una proporció creixent de problemes i situacions que es donen en la vida quotidiana, fins i tot en contextos professionals, requereixen un cert nivell de comprensió de les matemàtiques abans que es puguin entendre i abordar correctament. Les matemàtiques són una eina fonamental per als joves, ja que afronten una àmplia gamma de problemes i desafiaments en els diversos aspectes de la seva vida.
17. Per tant, és important comprendre el grau en què els joves que surten de l'escola estan adequadament preparats per usar les matemàtiques per pensar sobre les seves vides, planificar el seu futur i raonar i resoldre problemes significatius relacionats amb una sèrie de qüestions importants en la seva vida. Una avaluació als 15 anys proporciona als països un primer índex de com els individus poden respondre a la diversitat de situacions que es trobaran a la vida, que impliquen les matemàtiques i que es basen en el raonament matemàtic (deductiu i inductiu) i en la resolució de problemes per tenir sentit.
18. Com a base per a una avaluació internacional d'estudiants de 15 anys, és raonable preguntar: "Què és important per als ciutadans saber i fer en situacions que impliquen les matemàtiques?" Més específicament, "què significa ser matemàticament competent per a un jove de 15 anys, que pot estar sortint de l'escola o que es prepara per seguir una formació més especialitzada, per a una admissió professional o universitària?" És important que el constructe de competència matemàtica, que s'utilitza en aquest marc conceptual per denotar la capacitat dels individus de raonar matemàticament i resoldre problemes en una varietat de contextos del segle XXI, no es percebi com un sinònim de grau de coneixements i habilitats mínim o de baix nivell. Per contra, es pretén descriure les capacitats dels individus per al raonament matemàtic i l'ús de conceptes matemàtics, procediments, dades i eines per descriure, explicar i predir fenòmens. Aquesta concepció de la competència matemàtica subratlla la importància que els estudiants desenvolupin una comprensió forta dels conceptes de la matemàtica pura i dels beneficis de participar en exploracions en el món abstracte de les matemàtiques. El constructe de la competència matemàtica, tal com es defineix per a PISA, posa èmfasi en la necessitat de desenvolupar la capacitat dels estudiants per utilitzar les matemàtiques en un context i és important que tinguin experiències riques a les seves aules de matemàtiques per aconseguir-ho. Això és tan vàlid per a aquells estudiants de 15 anys d'edat que estan a prop del final de la seva escolarització en matemàtiques, com per als estudiants que continuaran amb l'estudi formal de les matemàtiques, com per als que deixaran l'escola.
19. La competència matemàtica transcendeix els límits d'edat. Per exemple, el Programa de l'OCDE per a l'Avaluació Internacional de Competències dels Adults (PIAAC) defineix la numeració com la capacitat d'accedir, utilitzar, interpretar i comunicar informació i idees matemàtiques, per tal de participar

i gestionar les demandes matemàtiques d'una sèrie de situacions de la vida adulta. Els paral·lelismes entre aquesta definició per a adults i la definició PISA 2021 de competència matemàtica per a joves de 15 anys són marcats i poc sorprenents.

20. L'avaluació de la competència matemàtica dels estudiants de 15 anys d'edat n'ha de tenir en compte les característiques rellevants; per tant, hi ha una necessitat d'identificar el contingut, el llenguatge i els contextos apropiats per a l'edat. Aquest marc conceptual distingeix entre les grans categories de contingut, que són importants per a la competència matemàtica de les persones en general, i els temes de contingut específic que siguin apropiats per a estudiants de 15 anys d'edat. La competència matemàtica no és un atribut que un individu té o no té. Més ben dit, la competència matemàtica és un atribut que es troba en un continu, amb alguns individus més competents matemàticament que d'altres i amb el potencial de creixement sempre present.
21. Per als propòsits de PISA 2021 la competència matemàtica es defineix com segueix:

La competència matemàtica és la capacitat d'un individu per raonar matemàticament i formular, utilitzar i interpretar les matemàtiques per resoldre problemes en una varietat de contextos del món real. Inclou conceptes, procediments, fets i eines per descriure, explicar i predir fenòmens. Ajuda les persones a conèixer el paper que juguen les matemàtiques al món i a emetre els judicis i prendre les decisions ben fonamentats que necessiten els ciutadans constructius, compromesos i reflexius de segle XXI.

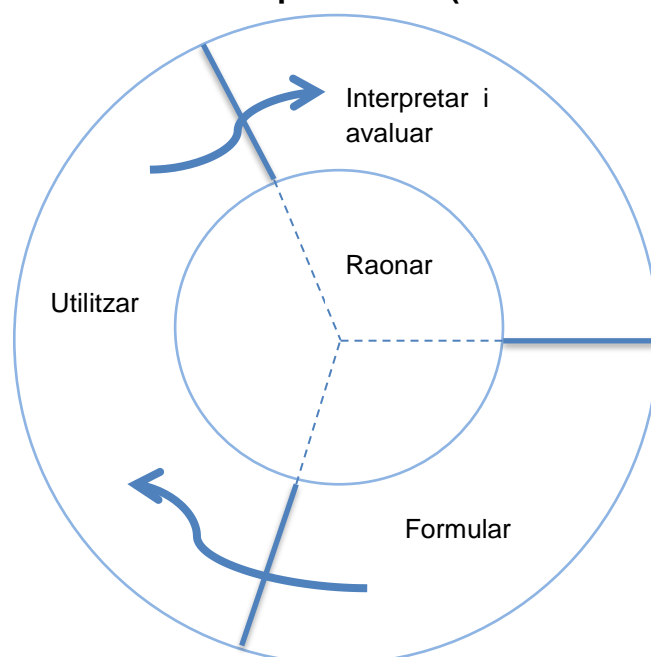
22. El marc conceptual de PISA 2021, en comparació amb els marcs de PISA 2003 i PISA 2012, tot i que aprecia i preserva les idees bàsiques de la competència matemàtica que hi havia estat desenvolupada, reconeix una sèrie de canvis produïts en el món de l'estudiant que assenyalen un canvi en la manera d'avaluar la competència matemàtica. La tendència és allunyar-se de la necessitat de fer càlculs bàsics en un món que canvia de pressa, canvi que és impulsat per les noves tecnologies i les tendències en les quals els ciutadans són creatius i compromesos, emetent judicis per a ells mateixos i per a la societat en què viuen.
23. Com que la tecnologia jugarà un paper creixent en la vida dels estudiants, la trajectòria a llarg termini de l'alfabetització matemàtica també hauria d'englobar la relació sinèrgica i recíproca entre el pensament matemàtic i el pensament computacional, introduïda a (Wing, 2006) com "la manera en què pensen els informàtics", que es considera un procés de pensament que comporta formular problemes i dissenyar-ne les solucions de manera que pugui ser executat per un ordinador, un ésser humà o una combinació d'ambdós (Wing, 2011). Els rols del pensament computacional en matemàtiques inclouen com interaccionen temes matemàtics específics amb

temes informàtics específics i com el raonament matemàtic complementa el pensament computacional (Gadanidis, 2015; Rambally, 2017). Per exemple, Pratt i Noss (2002) discuteixen l'ús d'un micra món computacional per desenvolupar coneixements matemàtics en el cas de l'atzar i la probabilitat; Gadanidis *et al.* (2018) proposen involucrar els nens petits amb idees de la teoria de grups, mitjançant una combinació d'eines pràctiques i de pensament computacional. D'aquí que l'educació matemàtica evolucioni en termes de les eines disponibles i les formes potencials de donar suport als estudiants per explorar les idees potents de la disciplina (Pei, Weintrop i Wilensky, 2018). L'ús reflexiu d'eines de pensament computacional i conjunts d'habilitats pot aprofundir en l'aprenentatge dels continguts de les matemàtiques, creant condicions d'aprenentatge efectives (Weintrop *et al.*, 2016). A més, les eines de pensament computacional ofereixen als estudiants un context en el qual poden rectificar construccions abstractes (explorant conceptes matemàtics i relacionant-s'hi de manera dinàmica) (Wing, 2008), a més d'expressar idees noves i d'interactuar amb conceptes a través de nous mitjans i noves eines de representació (Grover 2018; Niemelä *et al.*, 2017; Pei, Weintrop i Wilensky, 2018; Resnick *et al.*, 2009).

Una visió dels individus competents matemàticament a PISA 2021

24. L'èmfasi del llenguatge en la definició de competència matemàtica és el compromís actiu amb les matemàtiques per resoldre problemes del món real en una varietat de contextos, i està destinat a abastar el raonament matemàtic (tant deductiu com inductiu) i la resolució de problemes, utilitzant conceptes i procediments matemàtics, fets i eines per descriure, explicar i predir fenòmens.
25. És important tenir en compte que la definició de competència matemàtica no només se centra en l'ús de les matemàtiques per resoldre problemes del món real, sinó que també identifica el raonament matemàtic com un aspecte fonamental de la competència. La contribució que fa el marc conceptual PISA 2021 és posar de manifest la centralitat del raonament matemàtic tant al cicle de resolució de problemes com a la competència matemàtica en general.
26. La **figura 1** descriu la relació entre el raonament matemàtic (deductiu i inductiu) i la resolució de problemes, tal com es reflecteix en el cicle de modelatge matemàtic dels marcs conceptuals de PISA 2003 i PISA 2012.

Figura 1 – Competència matemàtica. La relació entre el raonament matemàtic i el cicle de resolució de problemes (modelització)



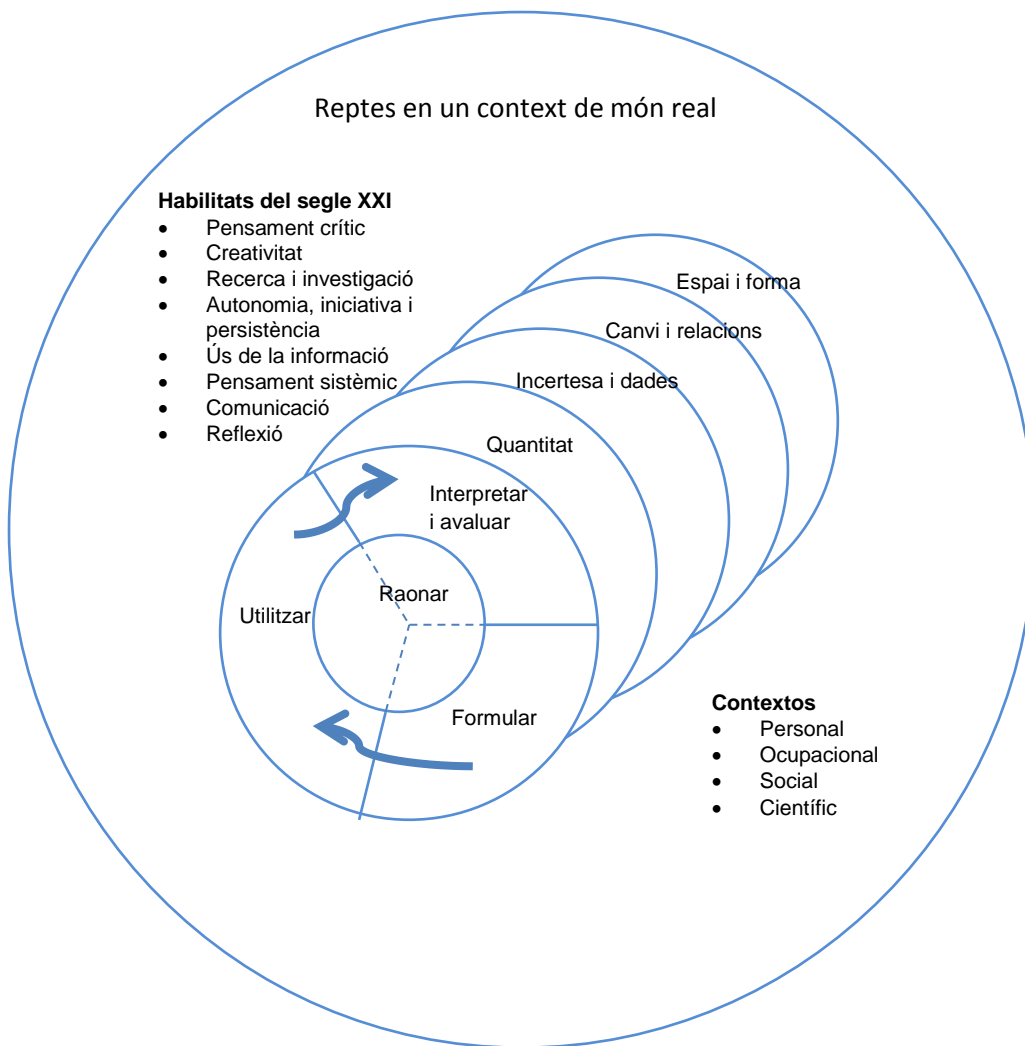
27. Per tal que els estudiants siguin matemàticament competents, en primer lloc han de poder utilitzar els coneixements de contingut matemàtic per reconèixer la naturalesa matemàtica d'una situació (problema), incloses aquelles situacions que es troben en el món real, i després formular-les en termes matemàtics. Aquesta transformació –des d'una situació ambigua, desordenada, del món real, fins a un problema de matemàtiques ben definit– requereix un raonament matemàtic. Un cop feta la transformació amb èxit, cal resoldre el problema matemàtic resultant mitjançant els conceptes, els algorismes i els procediments de matemàtiques que s'ensenyen a les escoles. No obstant això, pot requerir la presa de decisions estratègiques sobre la selecció d'aquestes eines i l'ordre de la seva aplicació: aquesta és també una manifestació del raonament matemàtic. Finalment, la definició de PISA ens recorda la necessitat que l'estudiant avaluï la solució matemàtica interpretant els resultats dins de la situació del món real on es dona el problema. A més, els estudiants també haurien de posseir habilitats de pensament computacional com a part de la seva pràctica de resolució de problemes i ser capaços de demostrar que les posseeixen. Aquestes habilitats inclouen el reconeixement de patrons, la descomposició, la determinació de quines eines informàtiques (si n'hi ha) podrien emprar-se en l'anàlisi o la resolució del problema, i definir algorismes com a part d'una solució detallada.

28. Tot i que el raonament matemàtic i la resolució de problemes del món real se superposen, hi ha un aspecte del raonament matemàtic que va més enllà de la resolució de problemes pràctics. El raonament matemàtic també és una manera d'avaluar i de formular arguments, d'avaluar interpretacions i inferències relacionades amb importants declaracions (per exemple, en els debats sobre polítiques públiques) i amb la resolució de problemes que són, per la seva naturalesa quantitativa, més ben entesos matemàticament.

29. La competència matemàtica comprèn, doncs, dos aspectes relacionats: el raonament matemàtic i la resolució de problemes. La competència matemàtica juga un paper important en poder utilitzar les matemàtiques per resoldre problemes del món real. A més, el raonament matemàtic (deductiu i inductiu) també va més enllà de la resolució de problemes del món real, ja que inclou la formulació de judicis informats sobre aquesta important família de problemes socials que es poden abordar matemàticament. També inclou emetre judicis sobre la validesa de la informació que bombardeja els individus en considerar les seves implicacions quantitatives i lògiques. Aquí el raonament matemàtic també contribueix al desenvolupament d'un conjunt d'habilitats del segle XXI (vegeu la secció 122 i següents).

30. El cercle exterior de la **figura 2** mostra que la competència matemàtica es porta a terme en el context d'un repte o d'un problema que sorgeix en el món real.

Figura 2 – PISA 2021. Relació entre el raonament matemàtic, el cicle de resolució de problemes (modelització), els continguts matemàtics, el context i una selecció d'habilitats del segle XXI



31. La **figura 2** també representa la relació que hi ha entre la competència matemàtica tal com es representa a la **figura 1** i els dominis de contingut matemàtic en els quals s'aplica la competència matemàtica; i també els contextos dels problemes i la selecció d'habilitats del segle XXI que fan, alhora, de suport i es desenvolupen a través de la competència matemàtica.
32. Aquestes categories de continguts de matemàtics són: quantitat, incertesa i dades, canvi i relacions, i espai i forma. Els estudiants han de basar el seu raonament en aquestes categories de coneixements de contingut matemàtic per formular el problema (transformant la situació del món real en una situació de problema matemàtic), per resoldre el problema matemàtic una vegada formulat i, finalment, per interpretar i avaluar la solució determinada.
33. Com en els marcs conceptuals anteriors, les quatre àrees de context que PISA continua utilitzant per definir situacions del món real són la personal, l'ocupacional, la social i la científica. El context pot ser de caràcter personal, que impliqui problemes o reptes que puguin afrontar un individu o un grup familiar o un grup d'iguals. El problema pot establir-se en un context social (centrat en la comunitat, ja sigui local, nacional o global), un context ocupacional (centrat en el món del treball) o un context científic (relacionat amb l'aplicació de les matemàtiques al món natural i tecnològic).
34. Incloses per primera vegada en el marc conceptual de PISA 2021 (i representades a la **figura 2**) se seleccionen les habilitats del segle XXI en què la competència matemàtica es basa i desenvolupa a la vegada. Les habilitats del segle XXI s'analitzen amb més detall a la secció 122 i següents. De moment, cal subratllar que, si bé els contextos (personal, social, ocupacional i científic) influeixen en el desenvolupament d'ítems de la prova d'avaluació, no hi ha expectativa que es desenvolupin deliberadament ítems que incorporin o tractin les habilitats del segle XXI. En lloc d'això, l'expectativa és que, responent a l'esperit del marc conceptual i d'acord amb la definició de competència matemàtica, les habilitats del segle XXI que s'han identificat s'integrin automàticament als ítems.
35. El llenguatge de la definició i la representació de la **figura 1** i la **figura 2** conserven i integren clarament la noció de modelatge matemàtic, que històricament ha estat la pedra angular del marc conceptual de PISA per a les matemàtiques (OCDE, 2004; OCDE, 2013). El cicle de modelització (formular, utilitzar, interpretar i avaluar) és un aspecte central de la concepció PISA dels estudiants matemàticament competents. No obstant això, sovint no és necessari participar en totes les etapes del cicle de modelització, especialment en el context d'una avaluació (Galbraith, Henn i Niss, 2007). Sovint es dona el cas que parts significatives del cicle de modelització matemàtica les han dut a terme d'altres persones, de manera que l'usuari final fa alguns dels passos del cicle de modelatge, però no tots. Per exemple, en alguns casos, es donen representacions matemàtiques, com ara gràfics o equacions, que es poden manipular directament per respondre una pregunta o per extreure'n alguna conclusió. En altres casos, els estudiants poden estar utilitzant una simulació per ordinador per explorar l'impacte de la variable canvi en un sistema o un entorn. Per aquest motiu, molts ítems de PISA

només inclouen parts del cicle de modelització. En realitat, l'individu que soluciona el problema de vegades també pot oscil·lar entre els processos, tornant a revisar les decisions i els supòsits anteriors. Cadascun dels processos pot presentar reptes considerables i es poden exigir diverses iteracions al llarg de tot el cicle.

36. En particular, els verbs *formular*, *utilitzar* i *interpretar* assenyalen els tres processos en què participaran els estudiants com a “solucionadors” de problemes actius. *Formular* situacions matemàticament implica aplicar raonaments matemàtics (deductius i inductius) en la identificació d'oportunitats per aplicar i utilitzar les matemàtiques: veure que les matemàtiques poden aplicar-se per comprendre o resoldre un problema o un desafiament presentat. Inclou poder adoptar una situació tal com es presenta i transformar-la en una forma apta per al tractament matemàtic, proporcionar una estructura i representacions matemàtiques, identificar variables i fer supòsits simplificadors per ajudar a resoldre el problema o per afrontar el repte. *Utilitzar* matemàtiques implica aplicar raonaments matemàtics mentre s'utilitzen conceptes, procediments, fets i eines matemàtiques per obtenir una solució matemàtica. Inclou fer càlculs, manipular expressions i equacions algebraiques o altres models matemàtics, analitzar la informació de manera matemàtica a partir de diagrames i gràfics matemàtics, desenvolupar descripcions i explicacions matemàtiques i utilitzar eines matemàtiques per resoldre problemes. *Interpretar* matemàtiques implica reflexionar sobre solucions o resultats matemàtics i interpretar-los en el context d'un problema o un repte. Es tracta d'aplicar raonaments matemàtics per avaluar solucions matemàtiques en relació amb el context del problema i determinar si els resultats són raonables i tenen sentit en la situació, determinant també què cal destacar a l'hora d'explicar la solució.
37. Per primera vegada, s'inclou en el marc conceptual de PISA 2021 una apreciació del creuament entre el pensament matemàtic i el pensament computacional que genera un conjunt similar de perspectives, processos de pensament i models mentals que els estudiants necessiten per tenir èxit en un món cada cop més tecnològic. Un conjunt de pràctiques ubicades sota el paraigua del pensament computacional (l'abstracció, el pensament algorítmic, l'automatització, la descomposició i la generalització) són també fonamentals, tant en el raonament matemàtic com en els processos de resolució de problemes. La naturalesa del pensament computacional dins de les matemàtiques es conceptualitza com a definició i elaboració de coneixements matemàtics que es poden expressar programant, permetent als estudiants modelar dinàmicament conceptes i relacions matemàtiques. Una taxonomia de pràctiques de pensament computacional dirigides específicament a les matemàtiques i a l'aprenentatge de les ciències comporta pràctiques de dades, pràctiques de modelat i simulació, pràctiques computacionals de resolució de problemes i pràctiques de pensament de sistemes (Weintrop *et al.*, 2016). La combinació del pensament matemàtic i computacional no només es fa fonamental per donar suport eficaç al desenvolupament de la comprensió conceptual dels estudiants del domini matemàtic, sinó també per desenvolupar els seus conceptes i habilitats de pensament computacional, donant als aprenentatges una visió més realista

de com es practica la matemàtica en el món professional i com és usada en el món real i, a més, prepara millor els estudiants per a la seva carrera professional en camps relacionats (Basu *et al.*, 2016; Benton *et al.*, 2017; Pei, Weintrop i Wilensky, 2018; Beheshti *et al.*, 2017).

Un enllaç explícit a una varietat de contextos per a problemes a PISA 2021

38. La referència a "diversos contextos del món real" en la definició de la competència matemàtica reconeix que el ciutadà del segle XXI és un consumidor d'arguments quantitativs, de vegades estadístics. La referència està pensada com una manera de vincular-se als contextos específics que es descriuen i s'exemplifiquen més endavant en aquest marc conceptual. Els contextos específics no són tan importants, però les quatre categories seleccionades per utilitzar-los (personal, ocupacional, social i científic) reflecteixen una àmplia gamma de situacions en què els individus poden trobar oportunitats matemàtiques. La definició també reconeix que la competència matemàtica ajuda els individus a reconèixer el paper que les matemàtiques juguen al món i a prendre el tipus de judicis i de decisions fonamentades requerides de ciutadans constructius, compromesos i reflexius davant dels missatges i dels arguments del tipus: "un estudi va provar que de mitjana...", "una enquesta mostra una gran davallada en...", "certs científics afirmen que el creixement de la població superarà la producció d'aliments en x anys...", etc.

Un paper visible per a les eines matemàtiques, inclosa la tecnologia, a PISA 2021

39. La definició de competència matemàtica inclou explícitament l'ús d'eines matemàtiques. Aquestes eines inclouen una varietat d'equips físics i digitals, programari i dispositius de càlcul. Les eines matemàtiques basades en ordinadors són d'ús comú en els llocs de treball del segle XXI, i seran cada vegada més freqüents a mesura que avança el segle, tant a la feina com a la societat en general. La naturalesa del dia a dia i els problemes relacionats amb el treball i les demandes dels individus per poder utilitzar les matemàtiques i el raonament lògic en situacions on les eines de computació estan presents s'ha expandit amb aquestes noves oportunitats, creant així expectatives millorades per a la competència matemàtica.
40. Des del cicle de 2015, l'avaluació basada en ordinador (CBA) ha estat el sistema principal d'aplicació de les proves PISA, tot i que hi havia disponible un instrument basat en paper per als països que van triar que els seus estudiants no fessin la prova amb ordinador. Les avaluacions de competència matemàtica del 2015 i del 2018 no van explotar del tot les oportunitats que ofereix l'ordinador.
41. L'Avaluació de les Matemàtiques Basada en l'Ordinador (CBAM) serà el format de l'avaluació de la competència matemàtica a partir de 2021. Tot i que l'opció d'una avaluació basada en paper continuarà essent possible per

als països que desitgin continuar d'aquesta manera, la CBAM ja no serà una versió informàtica d'una avaluació en paper, sinó que explotará les oportunitats que dona aquest format. Les oportunitats que crea aquesta transició es discuteixen amb més detall més endavant en aquest marc conceptual.

2. ORGANITZACIÓ DEL DOMINI

42. El marc conceptual de matemàtiques de PISA defineix el domini de les matemàtiques per a la mesura del rendiment de l'alumnat i descriu un enfocament per a l'avaluació de la competència matemàtica de l'alumnat de 15 anys. És a dir, PISA avalua fins a quin punt els estudiants de 15 anys poden raonar matemàticament i gestionar les matemàtiques amb habilitat quan s'enfronten a situacions i problemes, la majoria dels quals es presenten en contextos del món real.

43. A efectes de l'avaluació, la definició de la competència matemàtica de PISA 2021 es pot analitzar en termes de tres aspectes interrelacionats (vegeu la **figura 2**):

- Raonament matemàtic i resolució de problemes (que inclou els processos matemàtics que descriuen el que els individus fan per connectar el context del problema amb les matemàtiques i així resoldre el problema).
- El contingut matemàtic que està destinat a utilitzar-se en els ítems de l'avaluació.
- Els contextos en què es localitzen els ítems de l'avaluació, juntament amb les habilitats seleccionades del segle XXI² que els donen suport i que es desenvolupen mitjançant la competència matemàtica.

44. Les seccions següents tracten aquests aspectes. En ressaltar aquests aspectes del domini, el marc conceptual de matemàtiques de PISA 2021 ajuda a garantir que els ítems d'avaluació creats per a la prova reflecteixin un rang de raonament matemàtic i de resolució de problemes, continguts i contextos i habilitats del segle XXI, de manera que, considerats en el seu conjunt, el conjunt d'ítems d'avaluació funcionin eficaçment per avaluar el que defineix aquest marc com la competència matemàtica. Les preguntes següents, d'acord amb la definició de PISA 2021 de la competència matemàtica, són al darrere de l'organització d'aquesta secció del marc conceptual.

- Què fan els individus quan raonen matemàticament i resolen problemes matemàtics contextualitzats?
- Quins coneixements de contingut matemàtic podem esperar dels individus i, en particular, dels estudiants de 15 anys?
- En quin context es pot observar i avaluar la competència matemàtica i com interactua amb les habilitats identificades del segle XXI?

² Les habilitats seleccionades van ser recomanades per l'ODCE Subject Advisory Group (SAG), que en va identificar vuit per ser incloses en el currículum de les matemàtiques i en el marc conceptual de PISA 2021. Vegeu la figura 2 i el paràgraf 125 de més avall.

Raonament matemàtic i processos de la resolució de problemes

Raonament matemàtic

45. El raonament matemàtic (deductiu i inductiu) implica avaluar situacions, seleccionar estratègies, treure conclusions lògiques, desenvolupar i descriure solucions i reconèixer com es poden aplicar aquestes solucions. Els estudiants raonen matemàticament quan fan el següent:

- Identificar, reconèixer, organitzar, connectar i representar.
- Construir, abstrèure, avaluar, deduir, justificar, explicar i defensar.
- Interpretar, emetre judicis, criticar, rebatre i qualificar.

46. La capacitat de raonar lògicament i de presentar arguments de manera honesta i convincent és una habilitat cada vegada més important en el món actual. Les matemàtiques són una ciència sobre objectes i nocions ben definides que es poden analitzar i transformar de maneres diferents mitjançant el "raonament matemàtic" per obtenir conclusions sobre les quals estem segurs. Mitjançant les matemàtiques, els estudiants aprenen que amb raonaments adequats poden arribar a resultats i conclusions que poden confiar que siguin certs. A més, aquestes conclusions són lògiques i objectives i, per tant, són imparcials, sense necessitat de validació per part d'una autoritat externa. Aquest tipus de raonament, que és útil molt més enllà de les matemàtiques, es pot aprendre i practicar amb més eficàcia dins de les matemàtiques.

47. Dos aspectes del raonament matemàtic són especialment importants en el món actual i en la definició dels ítems PISA. Un és la deducció de supòsits clars (raonament deductiu), que és un tret característic del procés matemàtic. La utilitat d'aquesta habilitat ja s'ha subratllat. La segona dimensió important és el raonament estadístic i probabilístic (inductiu). A nivell lògic, sovint hi ha una confusió en la ment dels individus entre allò possible i allò probable, la qual cosa provoca que molts siguin presa fàcil de teories de conspiració o falses notícies. Des d'una perspectiva tècnica, el món actual és cada cop més complex i les seves múltiples dimensions estan representades per terabits de dades. Tenir coneixement d'aquestes dades és un dels grans reptes que la humanitat afrontarà en el futur. Els nostres estudiants haurien de familiaritzar-se amb la naturalesa d'aquestes dades i prendre decisions informades en un context de variació i d'incertesa.

48. El raonament matemàtic (tant deductiu com inductiu), habilitat per alguns com un coneixement clau que sustenta les matemàtiques escolars, és el nucli de la competència matemàtica. Entre aquests coneixements clau s'inclouen:

- Comprendre la quantitat, els sistemes numèrics i les seves propietats algebraiques.
- Valorar el poder de l'abstracció i la representació simbòlica.
- Detectar les estructures matemàtiques i les seves regularitats.
- Reconèixer les relacions funcionals entre quantitats.

- Utilitzar el modelatge matemàtic com una lent projectada al món real (per exemple, el sorgit en les ciències físiques, biològiques, socials, econòmiques i de comportament).
- Entendre la variació com el cor de les estadístiques.

La descripció de cada un d'aquests coneixements clau que es fa a continuació proporciona una visió general de la comprensió i com aquesta dona suport al raonament matemàtic. Si bé les descripcions poden semblar abstractes, la intenció no és que siguin tractades de manera abstracta en l'avaluació PISA. El missatge que les descripcions han de transmetre és com sorgeixen aquests coneixements clau en les matemàtiques escolars i com, en reforçar la seva presència a l'ensenyament, donem suport als estudiants perquè s'adonin que es poden aplicar en contextos nous i diferents.

Comprendre la quantitat, els sistemes numèrics i les seves propietats algebraiques

49. La noció bàsica de quantitat pot ser l'aspecte matemàtic més penetrant i essencial per implicar-se amb el món i treballar-hi (OCDE, 2017a: 18). En el nivell més bàsic, tracta de la capacitat útil de comparar cardinalitats de conjunts d'objectes. La capacitat de comptar sol incloure conjunts més petits –en la majoria de les llengües, només un petit subconjunt de nombres té noms. Quan valorem conjunts més grans, es fan operacions més complexes que estimar, arrodonir i aplicar ordres de magnitud. El recompte està molt relacionat amb una altra operació fonamental de classificar les coses, on sorgeix l'aspecte ordinal dels nombres. La quantificació dels atributs dels objectes (mesurament), de les relacions, de les situacions i de les entitats del món és una de les maneres més bàsiques de conceptualitzar el món circumdant (OCDE, 2017a).
50. Comprendre la quantitat, els sistemes de nombres i les seves propietats algebraiques inclou el concepte bàsic de nombre, els sistemes de nombres nidificats (per exemple, els nombres naturals dins dels enters que són dins dels racionals i, aquests, dins dels reals), l'aritmètica de nombres i les propietats algebraiques de què gaudeixen els sistemes. En particular, és útil comprendre com sistemes de nombres progressivament més expansius permeten la solució d'equacions progressivament més complicades. Això posa les bases per permetre als estudiants detectar més evidències de matemàtiques en el món real a mesura que aprenen més matemàtiques.
51. Per utilitzar la quantificació de manera eficient, un ha de poder aplicar no només nombres, sinó també els sistemes numèrics. Els nombres mateixos són de rellevància limitada; el que els converteix en una eina poderosa són les operacions que podem fer amb ells. Per això, una bona comprensió de les operacions dels nombres és la base del raonament matemàtic.
52. També és important comprendre la rellevància de les representacions (com a símbols que impliquen nombres, com a punts d'una recta numèrica, com a quantitats geomètriques i símbols especials com π) i com moure's entre elles; les formes en què aquestes representacions queden afectades pels sistemes

de numeració; les formes en què les propietats algebraiques d'aquests sistemes són rellevants i rellevants per operar dins dels sistemes; i la importància de les propietats additives i multiplicatives, l'associativitat, la commutativitat i la propietat distributiva de la multiplicació per sobre de l'addició. Els principis algebraics assoleixen el sistema de valors de lloc, permetent així una expressió econòmica de nombres i d'enfocaments eficient per fer-hi operacions. També és central la recta numèrica per a operacions amb nombres, incloent el treball amb nombres negatius, que són centrals per sumar i restar primer nombres enters, després racionals i, finalment, reals.

53. La centralitat del nombre com a concepte clau en totes les altres àrees matemàtiques que es tenen en compte aquí i en el raonament matemàtic en si, és innegable. La comprensió dels estudiants dels principis i les propietats algebraiques experimentats per primera vegada a través del treball amb nombres és fonamental per a la comprensió dels conceptes de l'àlgebra de l'escola secundària, juntament amb l'habilitat dels estudiants per dominar les manipulacions d'expressions algebraiques necessàries per resoldre equacions, configurar models, representar funcions i programar i crear fórmules en els fulls de càlcul. I en el món actual d'ús intensiu de dades, la facilitat amb la interpretació de patrons de nombres, la comparació de patrons i d'altres habilitats numèriques estan creixent en importància.
54. *Una àmplia comprensió de la quantitat i dels sistemes numèrics sustenta el raonament en les aplicacions matemàtiques al món real previstes per aquest marc conceptual.*

Valorar el poder de l'abstracció i de la representació simbòlica

55. Les idees fonamentals de les matemàtiques han sorgit de l'experiència humana al món i de la necessitat de proporcionar coherència, ordre i predicibilitat a aquesta experiència. Molts objectes matemàtics modelen la realitat o almenys reflecteixen aspectes de la realitat d'alguna manera. Tanmateix, l'essència de l'abstracció en matemàtiques és que és un sistema autònom i que els objectes matemàtics obtenen el seu significat des d'aquest sistema. L'abstracció involucra deliberadament i selectivament l'atenció a les similituds estructurals entre objectes matemàtics i construeix relacions entre aquests objectes a partir d'aquestes similituds. A les matemàtiques escolars, l'abstracció forma relacions entre objectes concrets, representacions simbòliques i operacions que inclouen algorismes i models mentals. Aquesta capacitat també juga un paper en el treball amb dispositius computacionals. La capacitat de crear, manipular i dibuixar significat en el treball amb abstraccions en contextos tecnològics en una important habilitat de pensament computacional.
56. Per exemple, els nens comencen a desenvolupar el concepte de "cercle/circumferència" en experimentar objectes específics que els porten a una comprensió informal dels cercles/circumferències com a "arrodonits". Poden dibuixar cercles/circumferències per representar aquests objectes, observant similituds entre els dibuixos per generalitzar sobre la "rodonesa", fins i tot si les circumferències/cercles són de mides diferents. La

"circumferència/cercle" es converteix en un objecte matemàtic abstracte quan els estudiants comencen a "usar" circumferències/cercles com a objectes en el seu treball i, més formalment, quan es defineix com el lloc geomètric de punts equidistants d'un punt fix en un pla bidimensional.

57. Els estudiants fan servir representacions –ja siguin basades en un text, simbòliques, gràfiques, numèriques, geomètriques o en un codi de programació– per organitzar i comunicar el seu pensament matemàtic. Les representacions ens permeten presentar idees matemàtiques d'una manera breu que, a més, condueix a algoritmes eficients. Les representacions també són un element central de la modelització matemàtica, que permeten als estudiants abstraure una formulació simplificada o idealitzada d'un problema del món real. Aquestes estructures també són importants per interpretar i definir el comportament dels dispositius computacionals.
58. *Valorar l'abstracció i la representació simbòlica dona suport al raonament en les aplicacions de les matemàtiques al món real previstes per aquest marc conceptual permetent als estudiants passar dels detalls específics d'una situació a les característiques més generals i a descriure-les d'una manera eficient.*

Detectar estructures matemàtiques i les seves regularitats

59. Quan els estudiants d'educació primària veuen: $5 + (3 + 8)$, alguns veuen una cadena de símbols que indiquen un càlcul que s'ha de fer en un ordre determinat d'acord amb les regles de jerarquia de les operacions; uns altres veuen un nombre afegit a la suma de dos altres nombres. Aquests darrers veuen l'estructura, i per això no cal que els expliquem l'ordre de funcionament, perquè si volen afegir un nombre a una suma, primer han de calcular la suma.
60. Detectar l'estructura continua sent important a mesura que els estudiants passen als cursos superiors. Un estudiant que veu $f(x) = 5 + (x - 3)^2$ dient que $f(x)$ és la suma de 5 i un quadrat que és zero quan $x = 3$, entén que el mínim de f és 5. Això estableix la base per al pensament funcional que s'exposa a la secció següent.
61. L'estructura està íntimament relacionada amb la representació simbòlica. L'ús dels símbols és potent, però només si mantenen el significat per al qual s'usa el símbol, en lloc de convertir-se en objectes sense sentit per ser reordenats en una pàgina. Detectar l'estructura és una manera de trobar i recordar el significat d'una representació abstracta. Aquestes estructures també són importants per interpretar i definir el comportament dels dispositius computacionals. El fet de poder veure l'estructura és una ajuda conceptual important per al coneixement procedimental.
62. Els exemples anteriors il·lustren com detectar l'estructura en objectes matemàtics abstractes és una manera de reemplaçar les regles d'anàlisi, que pot fer un ordinador, amb imatges conceptuals d'aquests objectes que n'aclareixen les propietats. Un objecte mantingut així a la ment és subjecte a un raonament a un nivell més alt que la simple manipulació simbòlica.

63. Un sòlid sentit de l'estructura matemàtica també és compatible amb el modelatge. Quan els objectes en estudi no són objectes matemàtics abstractes, sinó més aviat objectes del món real per ser modelats per les matemàtiques, llavors l'estructura matemàtica pot guiar el modelatge. Els estudiants també poden imposar l'estructura en objectes no matemàtics per fer-los subjectes a l'anàlisi matemàtica. Una forma irregular pot ser aproximada per formes més simples l'àrea de les quals és coneguda. Es pot entendre un patró geomètric hipotetitzant transformacions i simetries de translació, de rotació o de reflexió i estenent abstractament el patró a tot l'espai. L'anàlisi estadística sovint és una qüestió d'imposar una estructura a un conjunt de dades, per exemple, assumint que l'estructura prové d'una distribució normal o suposant que una variable és una funció lineal d'una altra, però que es mesura amb un error normalment distribuït.
64. *El fet de poder detectar estructures matemàtiques dona suport al raonament en les aplicacions de les matemàtiques al món real previstes per aquest marc conceptual permetent als estudiants aplicar coneixement sobre situacions o problemes en el context d'uns problemes a un altre context que comparteix una estructura similar.*

Reconèixer les relacions funcionals entre quantitats

65. Als estudiants d'educació primària se'ls plantegen problemes en els quals han de trobar quantitats específiques. Per exemple, a quina velocitat has de conduir des de Tucson fins a Phoenix, una distància de 180 km, en 1 hora i 40 minuts? Aquests problemes tenen una resposta específica: per conduir 180 km en 1 hora i 40 minuts, s'ha de conduir a 108 km per hora.
66. En algun moment, els estudiants comencen a considerar situacions on les quantitats són variables, és a dir, on poden assumir una sèrie de valors. Per exemple, ¿quina és la relació entre la distància recorreguda, d , en quilòmetres, i el temps dedicat a la conducció, t , en hores, si es condueix un vehicle a una velocitat constant de 108 km per hora? Aquestes preguntes presenten relacions funcionals. En aquest cas, la relació, expressada per l'equació $d = 108t$, és una relació proporcional, l'exemple fonamental, i potser el més important, per al coneixement general.
67. Les relacions entre quantitats es poden expressar amb equacions, gràfics, taules o descripcions verbals. Un pas important en l'aprenentatge és extreure'n la mateixa noció de funció, com un objecte abstracte del qual les quantitats són representacions. Els elements essencials del concepte són un domini, del qual se seleccionen les entrades, un condomini, en el qual es troben les sortides, i un procés per produir outputs a partir dels inputs.
68. *Reconèixer les relacions funcionals entre les variables en les aplicacions de les matemàtiques al món real que preveu aquest marc conceptual dona suport al raonament permetent als estudiants centrar-se en com la interdependència i interacció entre les variables impacta en una situació determinada.*

Utilitzar el modelatge matemàtic com una lent projectada al món real

69. Els models representen una conceptualització dels fenòmens. Els models són simplificacions de la realitat que preveuen certes característiques d'un fenomen mentre s'aproximen o ignoren d'altres funcions. Com a tal, "tots els models són incorrectes, però alguns són útils" (Box i Draper, 1987: 424). La utilitat d'un model prové del seu poder explicatiu i/o predictiu (Weintrop *et al.*, 2016). Els models són, en aquest sentit, abstraccions de la realitat. Un model pot presentar una conceptualització que s'entengui com una aproximació o una hipòtesi de treball relacionada amb l'objecte fenomen o pot ser una simplificació intencional. Els models matemàtics es formulen en llenguatge matemàtic i utilitzen una àmplia varietat d'eines i de resultats matemàtics (per ex., des de l'aritmètica, l'àlgebra, la geometria, etc.). Com a tals, s'utilitzen com a forma de definir amb precisió la conceptualització o la teoria d'un fenomen, per analitzar i avaluar les dades (el model s'ajusta a les dades?) i per fer prediccions. Poden operar amb els models, és a dir, poden executar-se en el temps o amb diferents inputs, produint així una simulació. Quan es faci això, és possible fer prediccions, estudiar conseqüències i avaluar l'adequació i la precisió dels models. Al llarg del procés de modelització, cal tenir en compte els paràmetres del món real que afecten el model i les solucions desenvolupades amb el model.
70. Els models basats en ordinador (o computacionals) proporcionen la capacitat de provar hipòtesis, de generar dades, d'introduir l'aleatorietat, etc. La competència matemàtica inclou la capacitat d'entendre els models computacionals, d'avaluar-los i d'extreure'n el significat.
71. *L'ús de models en general i de models matemàtics en particular dona suport al raonament sobre les aplicacions de les matemàtiques al món real que preveu aquest marc conceptual animant els estudiants a centrar-se en els elements més significatius de les situacions i, en fer això, a reduir el problema fins a la seva essència.*

Entendre la variació com el cor de l'estadística

72. En l'estadística, considerar la variabilitat és un element definidor –si no el central– en el qual es basa la disciplina. En el món actual, les persones sovint s'enfronten a aquest tipus de situacions simplement ignorant la variació i, com a resultat, suggerint generalitzacions que sovint són enganyoses, si no és que estan equivocades i, en conseqüència, poden ser molt perilloses. El biaix en el sentit de les ciències socials generalment es crea en no tenir en compte les fonts i les magnituds de la variabilitat en la característica en discussió.
73. L'estadística consisteix fonamentalment a comptabilitzar o modelar la variació mesurada per la variància o, en el cas de diverses variables, la matriu de covariància. Això proporciona un entorn probabilístic on comprendre diversos fenòmens, així com prendre decisions crítiques. L'estadística és, de moltes maneres, la cerca de patrons en un context altament variable: s'intenta trobar la "veritat" única definidora enmig d'un gran soroll aleatori. La "veritat" s'estableix entre cometes, ja que no és la naturalesa de la veritat que les

matemàtiques poden lliurar sinó una estimació de la veritat fixada en un context probabilístic, acompanyada d'una estimació de l'error contingut en el procés. Al final, el responsable de la decisió es queda amb el dilema de no saber amb certesa quina és la veritat. L'estimació que s'ha desenvolupat és, com a molt, un rang de valors possibles. Com millor sigui el procés executat, per exemple, com més gran sigui la mostra de dades, més estret serà el rang de valors possibles, tot i que no es pot evitar un rang. Alguns aspectes de tot això han estat presents en anteriors cicles de PISA, la importància creixent que van prenent contribueix a l'augment de l'èmfasi que s'hi posa en aquest marc conceptual.

74. *Entendre la variació com una característica central de l'estadística dona suport al raonament sobre les aplicacions de les matemàtiques al món real que preveu aquest marc conceptual en el sentit que s'encoratja els estudiants a utilitzar arguments basats en dades amb consciència de les limitacions de les conclusions que se'n poden extreure.*

Resolució de problemes

75. La definició de la competència matemàtica es refereix a la capacitat d'un individu per formular, utilitzar i interpretar (i avaluar) les matemàtiques. Aquestes tres paraules, *formular*, *utilitzar* i *interpretar*, proporcionen una estructura útil i significativa per organitzar els processos matemàtics que descriuen el que fan els individus per connectar el context d'un problema amb les matemàtiques i resoldre'l. Els ítems de la prova de matemàtiques de PISA 2021 s'assignaran a un raonament matemàtic o a un dels tres processos matemàtics:

- **Formular** situacions matemàticament.
- **Utilitzar** conceptes, fets, procediments i raonaments matemàtics.
- **Interpretar, aplicar i avaluar** els resultats matemàtics.

76. És important que tant els responsables de les polítiques educatives com els que es dediquen a l'educació dels estudiants dia a dia coneguin l'eficàcia dels estudiants per implicar-se en cadascun d'aquests elements del model/cicle de resolució de problemes. *Formular* indica amb quina eficàcia els estudiants són capaços de reconèixer i d'identificar oportunitats d'utilitzar les matemàtiques en situacions problemàtiques i, a continuació, proporcionar l'estructura matemàtica necessària per formular el problema contextualitzat de manera matemàtica. *Utilitzar* es refereix al grau en què els estudiants són capaços de fer càlculs i manipulacions i d'aplicar els conceptes i els fets que saben per arribar a una solució matemàtica d'un problema formulat matemàticament. *Interpretar* (i *avaluar*) es refereix a l'eficàcia amb què els estudiants són capaços de reflexionar sobre solucions o conclusions matemàtiques, interpretar-les en el context del problema del món real i determinar si el resultat o la conclusió són raonables i/o útils. La facilitat dels estudiants a l'hora d'aplicar les matemàtiques a problemes i situacions depèn de les habilitats inherents a aquests tres processos, i una comprensió de l'eficàcia dels estudiants en cada categoria pot ajudar a proporcionar

informació per prendre decisions tant als responsables de les polítiques educatives com als docents que treballen cada dia a les aules.

77. A més, encoratjar els estudiants a experimentar processos de resolució de problemes matemàtics a través d'eines i pràctiques de pensament computacional encoratja els estudiants a practicar habilitats de predicció, reflexió i depuració (Brennan i Resnick, 2012).

Formular situacions matemàticament

78. La paraula *formular* en la definició de competència matemàtica fa referència al fet que els individus poden reconèixer i identificar oportunitats d'utilitzar les matemàtiques i proporcionar una estructura matemàtica a un problema presentat d'una manera contextualitzada. En el procés de formulació de situacions matemàticament, els individus determinen on poden extreure les matemàtiques essencials per analitzar, configurar i resoldre el problema. Es tradueixen d'un entorn del món real al domini de les matemàtiques i proporcionen al problema del món real una estructura, una representació i una especificitat matemàtica. Motiven i donen sentit a les restriccions i hipòtesis del problema. Concretament, aquest procés de formular situacions matemàticament inclou activitats com les següents:

- Seleccionar un model apropiat d'una llista.³
- Identificar els aspectes matemàtics d'un problema situat en un context del món real i identificar-ne les variables significatives.
- Reconèixer l'estructura matemàtica (incloent-hi regularitats, relacions i patrons) en problemes o situacions.
- Simplificar una situació o un problema per fer-lo susceptible d'anàlisi matemàtica (per exemple, descomponent-lo).
- Identificar les restriccions i els supòsits que hi ha darrere qualsevol modelització matemàtica i les simplificacions obtingudes del context.
- Representar una situació matemàticament, utilitzant variables apropiades, símbols, diagrames i models estàndard.
- Representar un problema de manera diferent, incloent organitzar-lo d'acord amb els conceptes matemàtics i fer les suposicions apropiades.
- Comprendre i explicar les relacions entre el llenguatge específic del context d'un problema i el llenguatge simbòlic i formal necessari per a representar-lo matemàticament.
- Traduir un problema al llenguatge matemàtic o a una representació.
- Reconèixer aspectes d'un problema que es corresponen amb problemes coneguts o amb conceptes, fets o procediments matemàtics.
- Triar entre una sèrie d'eines i utilitzar l'eina informàtica més eficaç per mostrar una relació matemàtica inherent a un problema contextualitzat.

³ Aquesta activitat s'inclou a la llista per plantejar als elaboradors d'ítems de la prova la necessitat d'incloure-hi ítems accessibles als estudiants situats a la part baixa de l'escala de rendiment.

- Crear una sèrie ordenada d'instruccions (pas a pas) per resoldre problemes.

Utilitzar conceptes, fets, procediments i raonaments matemàtics

79. La paraula *utilitzar* en la definició de la competència matemàtica es refereix al fet que els individus són capaços d'aplicar els conceptes, els fets, els procediments i el raonament matemàtics per resoldre problemes formulats per obtenir conclusions matemàtiques. En el procés d'utilitzar conceptes, fets, procediments i raonaments matemàtics per resoldre problemes, els individus usen els procediments matemàtics necessaris per obtenir resultats i trobar una solució matemàtica (per exemple, plantejar operacions aritmètiques, resoldre equacions, fer deduccions lògiques de supòsits matemàtics, fer manipulacions simbòliques, extreure informació matemàtica de taules i gràfics, representar i manipular formes a l'espai, i analitzar dades). Treballen sobre un model de la situació del problema, hi estableixen regularitats, identifiquen connexions entre les diferents parts de les matemàtiques i creen arguments matemàtics. Concretament, aquest procés d'ús de conceptes, fets, procediments i raonaments matemàtics inclou activitats com:

- Fer un càlcul simple.**⁴
- Treure una conclusió senzilla.**
- Seleccionar una estratègia apropiada d'una llista.**
- Dissenyar i implementar estratègies per trobar solucions matemàtiques.
- Utilitzar eines matemàtiques, inclosa la tecnologia, per ajudar a trobar solucions exactes o aproximades.
- Aplicar fets matemàtics, regles, algorismes i estructures a l'hora de trobar solucions.
- Manipular nombres, informació i dades gràfiques i estadístiques, expressions i equacions algebraiques i representacions geomètriques.
- Fer diagrames matemàtics, gràfics, simulacions i construccions i extreure'n informació matemàtica.
- Utilitzar diferents representacions i canviar-les entre si durant el procés de trobar solucions.
- Fer generalitzacions basades en els resultats de l'aplicació de procediments matemàtics per trobar solucions.
- Reflexionar sobre arguments matemàtics i explicar i justificar resultats matemàtics.
- Avaluar la importància dels patrons i les regularitats observats (o proposats) en les dades.

⁴ Aquestes activitats (**) s'inclouen a la llista per plantejar als elaboradors d'ítems de la prova la necessitat d'incloure-hi ítems accessibles als estudiants situats a la part baixa de l'escala de rendiment.

Interpretar, aplicar i avaluar resultats matemàtics

80. La paraula *interpretar* (i *avaluar*) que s'utilitza en la definició de competència matemàtica se centra en la capacitat dels individus per reflexionar sobre solucions, resultats o conclusions matemàtiques i interpretar-los en el context del problema de la vida real que va iniciar el procés. Això implica traduir les solucions matemàtiques, o el seu raonament, al context del problema i determinar si els resultats són raonables i tenen sentit en el context del problema. *La interpretació, l'aplicació i l'avaluació de resultats matemàtics* engloba tant els elements "interpretar" com "avaluar" del cicle de modelatge matemàtic. Es pot demanar a les persones implicades en aquest procés que construeixin i comuniquin explicacions i arguments en el context del problema, reflexionant tant sobre el procés de modelatge com sobre els seus resultats. En concret, aquest procés d'interpretació, aplicació i avaluació de resultats matemàtics inclou activitats com:

- Interpretar informació presentada en forma gràfica i/o diagrames.**⁵
- Avaluar un resultat matemàtic en termes del context.**
- Interpretar un resultat matemàtic en el context del món real.
- Avaluar la raonabilitat d'una solució matemàtica en el context d'un problema del món real.
- Comprendre com el món real afecta els resultats i els càlculs d'un procediment o un model matemàtic per fer judicis contextuals sobre com s'han d'ajustar o aplicar els resultats.
- Explicar per què una conclusió o un resultat matemàtic té o no té sentit atès el context d'un problema.
- Comprendre l'abast i els límits dels conceptes i les solucions matemàtics.
- Criticar i identificar els límits del model utilitzat per resoldre un problema.
- Utilitzar el pensament matemàtic i el pensament computacional per fer prediccions, per proporcionar proves de les argumentacions, per provar i comparar les solucions proposades.

Coneixements de contingut matemàtic

81. La comprensió del contingut matemàtic –i la capacitat d'aplicar aquest coneixement per resoldre problemes contextualitzats significatius– és important per als ciutadans del món modern. És a dir, per raonar matemàticament i resoldre problemes i interpretar situacions en contextos personals, ocupacionals, socials i científics, és necessari basar-se en determinats coneixements i comprensió matemàtics.

⁵ Aquestes activitats (**) s'inclouen a la llista per plantejar als elaboradors d'ítems de la prova la necessitat d'incloure-hi ítems accessibles als estudiants situats a la part baixa de l'escala de rendiment.

82. Atès que l'objectiu de PISA és avaluar la competència matemàtica, es proposa una estructura organitzativa dels coneixements de contingut matemàtic que es basa en fenòmens matemàtics subjacents en una àmplia gamma de problemes. Aquesta organització per al contingut no és nova, com ho demostren dues publicacions conegudes: *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (Steen, 1990) i *Mathematics: The Science of Patterns* (Devlin, 1994).
83. Les categories següents de contingut (prèviament utilitzades el 2012) es tornen a utilitzar a PISA 2021 per reflectir tant els fenòmens matemàtics subjacents a una àmplia gamma de problemes com l'estructura general de les matemàtiques i els grans eixos dels plans d'estudi típics. Aquestes quatre categories caracteritzen la gamma de continguts matemàtics que són fonamentals per a la disciplina i il·lustren les àmplies àrees de contingut utilitzades en els ítems de la prova PISA 2021 (que inclouran ítems PISA-D per augmentar les oportunitats de resposta a la part baixa de l'escala de rendiment):
- canvi i relacions
 - espai i forma
 - quantitat
 - incertesa i dades
84. Amb aquestes quatre categories, el domini matemàtic es pot organitzar de manera que asseguri l'existència d'un espectre d'ítems de tot el domini i, al mateix temps, se centri en fenòmens matemàtics importants, evitant així una classificació massa granular que impedeixi l'anàlisi de problemes matemàtics rics i desafiants basats en situacions reals.
85. Tot i que la classificació per categories de contingut és important per al desenvolupament de l'ítem, per a la selecció i l'informe dels resultats de l'avaluació, és important tenir en compte que alguns ítems podrien ser classificats en més d'una categoria de contingut.
86. Els currículums escolars de matemàtiques solen estar organitzats al voltant de les branques de contingut (les més comunes: nombres, àlgebra, funcions, geometria i processament de dades) i la llista de temes detallats ajuda a definir expectatives clares. Aquests currículums estan dissenyats per dotar els estudiants de coneixements i habilitats que tracten aquests mateixos fenòmens matemàtics subjacents que organitzen el contingut de PISA. El resultat és que la gamma de continguts que es deriven de l'organització que fa PISA està molt alineada amb el contingut que sol trobar-se en els currículums de matemàtiques de cada país. Aquest marc conceptual inclou una sèrie de temes de contingut adequats per avaluar la competència matemàtica d'estudiants de 15 anys, basats en l'anàlisi de les normes nacionals d'onze països.
87. Les àmplies categories de contingut matemàtic i els temes de contingut més específics apropiats per als estudiants de 15 anys descrits en aquesta secció reflecteixen el nivell i l'amplitud del contingut que és apte per a la seva inclusió

a l'avaluació PISA 2021. Es proporcionen descripcions de cada categoria de contingut i s'informa de la rellevància de cada una per raonar i resoldre problemes significatius, i s'inclouen definicions més específiques dels tipus de contingut que són apropiats per a la inclusió en una avaluació de la competència matemàtica d'estudiants de 15 anys i joves de fora de l'escola.

88. S'han identificat quatre temes que tindran un èmfasi especial en l'avaluació PISA 2021. Aquests temes no són nous en les categories de contingut de matemàtiques. Són temes de les categories de contingut existents que mereixen un èmfasi especial. En el treball de Mahajan *et al.*, *PISA Mathematics 2021* (2016), els quatre temes es presenten no només com a situacions més habituals en la vida adulta en general, sinó com els tipus de matemàtiques necessàries en les noves àrees emergents de l'economia, la fabricació d'alta tecnologia, etc. Els quatre temes són: fenòmens de creixement; aproximacions geomètriques; simulacions informàtiques; i presa de decisions condicional. Aquests temes s'han d'abordar en els ítems de la prova de manera coherent amb les experiències dels joves de 15 anys. Cada tema es tracta a la secció de la categoria de contingut a la qual pertany:

- Fenòmens de creixement (canvi i relacions)
- Aproximació geomètrica (espai i forma)
- Simulacions informàtiques (quantitat)
- Presa de decisions condicional (incertesa i dades)

Canvi i relacions

89. Els mons naturals i dissenyats mostren multitud de relacions temporals i permanents entre objectes i circumstàncies, on es produeixen canvis dins dels sistemes d'objectes interrelacionats o en les circumstàncies on els elements s'influeixen mútuament. En molts casos, aquests canvis es produeixen al llarg del temps i, en d'altres, els canvis d'un objecte o quantitat es relacionen amb canvis en un altre. Algunes d'aquestes situacions impliquen un canvi discret; d'altres canvien contínuament. Algunes relacions són de caràcter permanent o invariant. Ser més competent sobre el canvi i les relacions implica entendre els tipus fonamentals de canvi i reconèixer quan es produeixen per utilitzar models matemàtics adequats per descriure i predir el canvi. Matemàticament, això significa modelar el canvi i les relacions amb funcions i equacions apropiades, així com crear, interpretar i traduir les representacions simbòliques i gràfiques de les relacions.

90. El canvi i les relacions es manifesten en entorns tan diversos com el creixement d'organismes, la música, els canvis i cicles estacionals, els patrons meteorològics, els nivells d'ocupació i les condicions econòmiques. Els aspectes del contingut matemàtic tradicional de funcions i àlgebra, que inclouen expressions algebraïques, equacions i desigualtats, taules i representacions gràfiques, són fonamentals en la descripció, modelització i interpretació dels fenòmens de canvi. Les eines informàtiques proporcionen un mitjà per visualitzar i interactuar amb el canvi i les relacions. Reconèixer com i quan un dispositiu computacional pot augmentar i complementar els

conceptes matemàtics és una habilitat de pensament computacional important.

91. Les representacions de dades i relacions descrites utilitzant estadístiques també serveixen per mostrar i interpretar els canvis i les relacions, i tenir una base sòlida en els conceptes bàsics del nombre i les unitats també és essencial per definir i interpretar els canvis i les relacions. Algunes relacions interessants sorgeixen de la mesura geomètrica, per exemple, com els canvis en el perímetre d'una família de formes es poden relacionar amb canvis en l'àrea, o les relacions establertes entre les longituds dels costats dels triangles.
92. Fenòmens de creixement: la comprensió dels perills de les pandèmies de grip i dels brots bacterians, així com l'amenaça del canvi climàtic, exigeixen que les persones pensin no només en termes de relacions lineals, sinó que reconeixin que aquests fenòmens necessiten models no lineals (sovint exponencials, però també d'altres). Les relacions lineals són comunes i fàcils de reconèixer i comprendre, però s'ha d'entendre que la linealitat pot ser perillosa. Un bon exemple de linealitat, i probablement utilitzat per tots, és estimar la distància recorreguda en diverses quantitats de temps mentre es viatja a una velocitat determinada. Aquesta aplicació proporciona una estimació raonable sempre que la velocitat romangui relativament constant. Però amb les epidèmies de grip, per exemple, un enfocament tan lineal menystindria enormement el nombre de persones malaltes en els 5 dies posteriors al brot inicial. Aquí és on és fonamental una comprensió bàsica del creixement no lineal (que inclou el creixement quadràtic i exponencial) i la rapidesa amb què les infeccions poden propagar-se, atès que la taxa de canvi augmenta dia a dia. La propagació de la infecció per Zika és un exemple important de creixement exponencial; reconèixer-lo com a tal va ajudar el personal mèdic a comprendre l'amenaça inherent i la necessitat d'una acció ràpida.
93. Identificar els fenòmens de creixement com a punt focal de la categoria de contingut de canvi i relacions no vol dir que hi hagi l'expectativa que els estudiants participants a PISA hagin estudiat la funció exponencial i, sens dubte, els ítems no requeriran un coneixement de la funció exponencial. En canvi, l'expectativa és que hi haurà ítems on s'espera que els estudiants (a) reconeixin que no tot el creixement és lineal, (b) que el creixement no lineal té implicacions particulars i profundes sobre com entenem certes situacions, i (c) que els estudiants apreïen el significat intuïtiu del "creixement exponencial" com a taxa de creixement extremadament ràpida. Per exemple, en l'escala de mesura dels terratrèmols, cada augment d'una unitat a escala Richter no significa un augment proporcional en el seu efecte, sinó més aviat per 10, 100 i 1000 vegades, etc.

Espai i forma

94. L'espai i la forma abasten una àmplia gamma de fenòmens que es troben a tot arreu en el nostre món visual i físic: patrons, propietats d'objectes, posicions i orientacions, representacions d'objectes, descodificació i

codificació d'informació visual, navegació i interacció dinàmica amb formes reals, així com les representacions, el moviment, el desplaçament i la capacitat d'anticipar accions en l'espai. La geometria serveix com una base essencial per a l'espai i la forma, però la categoria s'estén més enllà de la geometria tradicional en contingut, significat i mètode, basant-se en elements d'altres àrees matemàtiques com la visualització espacial, el mesurament i l'àlgebra. Per exemple, les formes poden canviar i un punt pot moure's al llarg d'un lloc geomètric, cosa que requereix conceptes de funció. Les fórmules de mesurament són centrals en aquesta àrea. En aquesta categoria de contingut s'inclouen el reconeixement, la manipulació i la interpretació de formes en configuracions que demanen eines que van des del programari de geometria dinàmica fins als sistemes de posicionament global (GPS) i fins al programari d'aprenentatge automàtic.

95. PISA assumeix que la comprensió d'un conjunt de conceptes i d'habilitats bàsics és important per a la competència matemàtica en relació amb l'espai i la forma. La competència matemàtica en l'àrea de l'espai i la forma implica una sèrie d'activitats com la comprensió de la perspectiva (per exemple, en les pintures), la creació i la lectura de mapes, la transformació de formes amb tecnologia i sense, la interpretació de vistes d'escenes tridimensionals des de diverses perspectives i la construcció de representacions de formes.
96. Aproximacions geomètriques: el món d'avui està ple de formes que no segueixen els patrons típics d'uniformitat o de simetria. Com que les fórmules simples no s'ocupen de la irregularitat, s'ha tornat més difícil d'entendre el que veiem i trobar l'àrea o el volum de les estructures resultants. Per exemple, trobar la quantitat necessària de catifes en un edifici en què les habitacions tenen angles aguts, juntament amb corbes estretes, exigeix un enfocament diferent del que demanaria una habitació típicament rectangular.
97. La identificació d'aproximacions geomètriques com a punt focal de la categoria de contingut d'espai i forma indica la necessitat que els estudiants siguin capaços d'utilitzar la seva comprensió dels fenòmens de l'espai i de la forma tradicionals en una sèrie de situacions típiques.

Quantitat

98. La noció de quantitat pot ser l'aspecte matemàtic més omnipresent i essencial, participatiu i funcional en el nostre món. Incorpora la quantificació dels atributs dels objectes, relacions, situacions i entitats en el món, comprenent diverses representacions d'aquestes quantificacions i jutjant interpretacions i arguments basats en la quantitat. Participar en la quantificació del món implica comprendre mesuraments, comptes, magnituds, unitats, indicadors, grandària relativa i tendències numèriques i patrons. Aspectes del raonament quantitatiu –com ara el sentit numèric, les múltiples representacions de nombres, l'elegància en el càlcul matemàtic, el càlcul mental, l'estimació i avaluació de la raonabilitat dels resultats– són l'essència de la competència matemàtica en relació amb la quantitat.

99. La quantificació és un mètode primordial per descriure i mesurar un gran conjunt d'atributs d'aspectes del món. Permet la modelització de situacions per a l'examen de canvis i relacions, per a la descripció i manipulació d'espais i formes, per a organitzar i interpretar dades i per a la mesura i avaluació de la incertesa. Per tant, la competència matemàtica en l'àrea de la quantitat aplica el coneixement de nombres i operacions numèriques en una àmplia varietat d'entorns.
100. Simulacions informàtiques: tant en matemàtiques com en estadística hi ha problemes que no s'aborden fàcilment perquè les matemàtiques requerides són complexes o impliquen un gran nombre de factors que operen en un mateix sistema o per qüestions ètiques relacionades amb l'impacte que tenen sobre els éssers vius o el seu entorn. Cada cop més, al món actual s'aborden aquests problemes mitjançant simulacions informàtiques impulsades per algorismes. A l'exemple il·lustratiu, *Simulació d'estalvis* (vegeu l'annex A) l'estudiant utilitza una simulació informàtica com a eina per a la presa de decisions. La simulació informàtica fa els càlculs per a l'alumne, deixant que l'alumne planifiqui, faci prediccions i resolgui problemes basats en les variables que es poden controlar.
101. Identificar les simulacions informàtiques com a punt focal de la categoria de contingut de quantitat indica que en el context en què s'utilitza l'Avaluació de les Matemàtiques Basada en l'Ordinador (CBAM) de PISA, emprada des del 2021, hi ha una àmplia categoria de problemes complexos, inclosos els pressupostos i la planificació, que els estudiants poden analitzar en termes de les variables del problema, utilitzant simulacions informàtiques proveïdes com a part de l'ítem.

Incertesa i dades

102. En ciència, en tecnologia i en la vida quotidiana, la variació i la seva incertesa associada són naturals. És un fenomen que es basa en la teoria de la probabilitat i l'estadística. La categoria de contingut d'incertesa i dades implica reconèixer el lloc de la variació en el món real, inclòs tenir un sentit de la quantificació d'aquesta variació i reconèixer la seva incertesa i error en les inferències que s'hi relacionen. També implica formular, interpretar i avaluar conclusions extrems de situacions on hi ha incertesa. La presentació i la interpretació de les dades són conceptes clau en aquesta categoria (Moore, 1997).
103. Les prediccions econòmiques, els resultats de les enquestes i les previsions meteorològiques inclouen mesures de variació i d'incertesa. Hi ha variació en els processos de fabricació, en els resultats de les proves i en les conclusions d'una enquesta, i l'atzar és fonamental per a moltes activitats lúdiques de què gaudeixen els individus. Les àrees curriculars tradicionals de probabilitat i estadística proporcionen mitjans formals per descriure, modelar i interpretar una determinada classe de fenòmens en què la variació té un paper central i per fer-hi les inferències estocàstiques corresponents. A més, el coneixement del nombre i d'aspectes de l'àlgebra, com els gràfics i la

representació simbòlica, contribueixen a involucrar-se en la resolució de problemes en aquesta categoria de contingut.

104. Presa de decisions condicionals: l'estadística proporciona una mesura de la variació característica de bona part del que la gent es troba en la seva vida diària. Aquesta mesura és la variància. Quan hi ha més d'una variable, hi ha variació en cadascuna de les variables, així com una covariància que caracteritza les relacions entre les variables. Aquestes interrelacions sovint es poden representar en taules bidireccionals que proporcionen la base per prendre decisions condicionals (inferències). En una taula bidireccional per a dues variables dicotòmiques (és a dir, dues variables amb dues possibilitats cadascuna), hi ha quatre combinacions. La taula bidireccional (anàlisi de la situació) proporciona tres tipus de percentatges que, a la vegada, proporcionen estimacions de les probabilitats corresponents. Aquestes inclouen les probabilitats dels quatre esdeveniments conjunts, dels dos marginals i les probabilitats condicionals que tenen un paper central en el que s'ha anomenat presa de decisions condicional. L'esperat dels ítems de la prova PISA és que els estudiants puguin llegir les dades rellevants de la taula amb una comprensió profunda del significat de les dades que n'extreuen.
105. A l'exemple il·lustratiu *Decisió de compra* (vegeu l'annex A), es presenta a l'estudiant un resum de les valoracions que han fet els clients d'un producte en una botiga en línia. A més, l'estudiant rep una anàlisi més detallada de les revisions fetes pels clients que van proporcionar qualificacions d'1 i 2 estrelles. Aquest efecte estableix una taula de dues vies i es demana a l'estudiant que demostrï que comprèn les diferents estimacions de probabilitat que proporciona la taula de dues vies.
106. Identificar la presa de decisions condicionals com a punt focal de la categoria de contingut d'incertesa i dades indica que s'ha d'esperar que els estudiants apreïïn com la formulació de l'anàlisi en un model repercuteix en les conclusions que poden sorgir-ne i que diferents supòsits/relacions poden derivar en conclusions diferents.

Temes de contingut per guiar l'avaluació de la competència matemàtica dels estudiants de 15 anys

107. Per comprendre i resoldre problemes contextualitzats de canvi i relacions, d'espai i forma, de quantitat i d'incertesa i dades es requereix basar-se en una varietat de conceptes, procediments, fets i eines matemàtiques en un nivell adequat de profunditat i sofisticació. Com a avaluació de la competència matemàtica, PISA s'esforça a avaluar els nivells i els tipus de matemàtiques que són adequats per a estudiants de 15 anys en la trajectòria que fan per convertir-se en ciutadans del segle XXI constructius, compromesos i reflexius, capaços d'emetre judicis i prendre decisions fonamentats. També es dona el cas que PISA, encara que no estigui dissenyat o pensat per ser una avaluació basada en el currículum, s'esforça a reflectir les matemàtiques que els estudiants probablement han tingut l'oportunitat d'aprendre als 15 anys.

108. En el desenvolupament del marc conceptual de la competència matemàtica de PISA 2012, amb vista a desenvolupar una avaluació que fos alhora reflexiva i amb visió de futur de les matemàtiques que els estudiants de 15 anys probablement van tenir l'oportunitat d'aprendre, es van dur a terme anàlisis d'una mostra dels resultats d'aprenentatge desitjats d'onze països per determinar el que aprenen els estudiants a les aules de tot el món i quins països valoren una preparació realista i important per als estudiants a mesura que s'apropen a l'entrada al món del treball o a l'ingrés a una institució d'educació superior. Basant-se en les característiques comunes identificades en aquestes anàlisis, juntament amb el criteri dels experts en matemàtiques, es descriuen a continuació els continguts que es consideren apropiats per a la seva inclusió en l'avaluació de la competència matemàtica dels estudiants de 15 anys d'edat definits a PISA 2012 i mantinguts a PISA 2021.
109. Per a PISA 2021 s'han afegit quatre temes centrals a la llista. Les llistes resultants pretenen ser il·lustratives dels temes de contingut inclosos a PISA 2021 i no una llista exhaustiva:
- *Fenòmens de creixement*: diferents tipus de creixement lineal i no lineal.
 - *Aproximació geomètrica*: aproximar els atributs i les propietats de formes i objectes irregulars o desconeguts, trencant aquestes formes i objectes fins a fer-los formes i objectes més familiars per als quals hi ha fórmules i eines.
 - *Simulacions informàtiques*: explorar situacions (que poden incloure pressupostos, planificació, distribució de població, propagació de malalties, probabilitat experimental, modelització del temps de reacció, etc.) en termes de les variables i de l'impacte que aquestes tenen en el resultat.
 - *Presa de decisions condicional*: usar els principis bàsics de combinatòria i comprendre la interrelació entre variables per interpretar situacions i fer prediccions.
 - *Funcions*: el concepte de funció, posant l'èmfasi en les funcions lineals però no limitant-l'hi, en les seves propietats, i en una varietat de descripcions i representacions. Les representacions habituals són verbals, simbòliques, tabulars i gràfiques.
 - *Expressions algebraiques*: interpretació i manipulació verbal amb expressions algebraiques, que impliquen nombres, símbols, operacions aritmètiques, potències i arrels simples.
 - *Equacions i inequacions*: equacions lineals i afins i inequacions, equacions de segon grau senzilles i mètodes analítics de resolució i mètodes no analítics de resolució.
 - *Sistemes de coordenades*: representació i descripció de dades, posicions i relacions.
 - *Relacions dins i entre objectes geomètrics en dues i tres dimensions*: relacions estàtiques com les connexions algebraiques entre elements de les figures (per exemple, el teorema de Pitàgores, que defineix la relació entre les longituds dels costats d'un triangle rectangle), posició relativa, semblança i congruència, i relacions dinàmiques que

comporten transformació i moviment d'objectes, així com correspondències entre objectes bidimensionals i tridimensionals.

- *Mesura*: quantificació de característiques de i entre formes i objectes, com ara mesures d'angles, distància, longitud, perímetre, circumferència, àrea i volum.
- *Nombres i unitats*: conceptes, representacions de nombres i sistemes de nombres (inclosa la conversió entre sistemes de nombres), incloses les propietats de nombres enters i racionals, així com quantitats i unitats referides a fenòmens com ara el temps, els diners, el pes, la temperatura, la distància, l'àrea i el volum, i les quantitats derivades i la seva descripció numèrica.
- *Operacions aritmètiques*: la naturalesa i les propietats d'aquestes operacions i les convencions de notació relacionades.
- *Percentatges, ràtios i proporcions*: la descripció numèrica de la magnitud relativa i l'aplicació de proporcions i del raonament proporcional per resoldre problemes.
- *Principis de recompte*: combinacions senzilles.
- *Estimació*: aproximació basada en el propòsit de quantitats i expressions numèriques, inclosos els díigits significatius i l'arrodoniment.
- *Recollida, representació i interpretació de dades*: naturalesa, gènesi i recollida de diversos tipus de dades, i les diferents maneres d'analitzar-les, representar-les i interpretar-les.
- *Variabilitat de dades i la seva descripció*: conceptes com la variabilitat, la distribució i la tendència central dels conjunts de dades, i les maneres de descriure i interpretar-les en termes quantitativs i gràfics.
- *Mostres i mostreig*: conceptes de mostreig i mostreig de dades de poblacions, incloses inferències simples basades en propietats de mostres que inclouen l'exactitud i la precisió.
- *Possibilitat i probabilitat*: concepte d'esdeveniments aleatoris, variació aleatòria i la seva representació, atzar i freqüència d'esdeveniments, i aspectes bàsics dels conceptes de probabilitat i de probabilitat condicional.

Contextos per als ítems d'avaluació i les habilitats seleccionades del segle XXI

110. La definició de competència matemàtica introdueix dues consideracions importants per als ítems d'avaluació PISA. En primer lloc, la definició deixa clar que la competència matemàtica es porta a terme en el *context del món real*. En segon lloc, la competència matemàtica *ajuda les persones a conèixer el paper que les matemàtiques tenen al món i a emetre judicis i prendre decisions ben fonamentats que necessiten els ciutadans constructius, compromesos i reflexius del segle XXI*. En aquesta secció tractem com els contextos del món real i les habilitats del segle XXI tenen impacte en el desenvolupament dels ítems de la prova.

111. La naturalesa del *context del món real* de la competència matemàtica no està exempta de problemes per a PISA. Els contextos del món real comporten

informació i aquesta informació es comunica mitjançant un text. La informació quantitativa i estadística que flueix al món i que arriba als ciutadans es comunica mitjançant un text imprès o parlat, per exemple articles als mitjans de comunicació, comunicats de premsa, blocs, xarxes socials, anuncis, etc. Aquest text imprès i parlat s'utilitza per presentar missatges o arguments que poden incloure nombres i/o gràfics o no incloure'ls. El text és l'eina principal per comunicar el context i d'aquí es dedueix que la comprensió del text és una habilitat fonamental i prèvia per a tenir èxit en la competència matemàtica. El repte que suposa per a PISA i per al desenvolupament d'ítems no és insignificant. D'una banda, l'avaluació ha de presentar missatges quantitativament socialment significatius mitjançant un text ric. De l'altra, el caràcter comparatiu de l'avaluació, els nombrosos idiomes en què es tradueix i l'ampli ventall de nivells de comprensió del text entre els joves de 15 anys participants limita la riquesa del text que es pot utilitzar de manera realista. Aquest repte es pren en consideració més endavant, a la secció dedicada al desenvolupament d'ítems (secció 145 i següents).

Contextos

112. Un aspecte important de la competència matemàtica és que les matemàtiques s'utilitzen per resoldre un problema situat en un context. El context és l'aspecte del món d'un individu en el qual es col·loquen els problemes. L'elecció de les estratègies i de les representacions matemàtiques adequades sol dependre del context en què sorgeix un problema i, per implicació, és necessari utilitzar el coneixement del context del món real en el desenvolupament del model. Ser capaç de treballar en un context és molt apreciat per posar requisits addicionals a qui soluciona el problema (vegeu Watson i Callingham (2003), per trobar-hi estadístiques). Per a PISA, és important que s'utilitzin una gran varietat de contextos. Això ofereix la possibilitat de connectar amb el rang més ampli possible d'interessos individuals i amb el rang de situacions en què els individus es troben al segle XXI.
113. A la llum de la quantitat de països que participen a PISA 2021 i amb un nombre creixent de participants de països d'ingressos baixos i mitjans, així com la possibilitat de trobar joves de 15 anys que no van a l'escola, és important que els elaboradors d'ítems prenguin gran cura per garantir que els contextos utilitzats per als ítems siguin accessibles per a una àmplia gamma de participants. En aquest sentit, també és important que la càrrega de lectura dels ítems sigui modesta perquè els ítems continuïn avaluant la competència matemàtica.
114. Les quatre categories de context del marc conceptual de PISA 2012 s'han mantingut per al marc conceptual de PISA 2021 i s'utilitzen per informar del desenvolupament de l'ítem d'avaluació. S'ha de tenir en compte que si bé aquests contextos tenen la intenció d'informar sobre el desenvolupament de l'ítem, no hi ha cap expectativa que hi hagi informes sobre aquests contextos.
115. **Personal** – Els problemes classificats en la categoria de context personal se centren en les activitats pròpies de l'individu, de la família o del grup

d'iguals. Els tipus de contextos que es poden considerar personals inclouen (però no s'hi limiten) la preparació d'aliments, les compres, els jocs, la salut personal, el transport personal, l'esbarjo, els esports, els viatges, la programació personal i les finances personals.

116. **Ocupacional** – Els problemes classificats en la categoria de context ocupacional se centren en el món del treball. Els tipus de contextos que poden ser considerats ocupacionals poden incloure (sense limitar-s'hi) ítems de mesurament, de càlcul de costos i comandes de materials per a la construcció, nòmina/comptabilitat, control de qualitat, programació/inventari, disseny/arquitectura i presa de decisions relacionades amb el treball. Els contextos ocupacionals poden relacionar-se amb qualsevol activitat del món laboral, des de la feina no qualificada fins als nivells més alts de treball professional, tot i que els ítems d'avaluació de PISA han de ser accessibles per a estudiants de 15 anys.
117. **Social** – Els problemes classificats en la categoria de context social se centren en la comunitat (ja sigui local, nacional o global). Poden involucrar (però no s'hi limiten) aspectes com els sistemes de votació, el transport públic, el govern, les polítiques públiques, la demografia, la publicitat, les estadístiques nacionals i l'economia. Tot i que els individus estan involucrats en tots aquests aspectes de manera personal, en la categoria del context social l'enfocament dels problemes es fa des de la perspectiva de la comunitat.
118. **Científic** – Els problemes classificats en la categoria científica es relacionen amb l'aplicació de les matemàtiques al món natural i amb qüestions i temes relacionats amb la ciència i la tecnologia. Els contextos particulars poden incloure (però no limitar-s'hi) àmbits com el temps o el clima, l'ecologia, la medicina, la ciència espacial, la genètica, la mesura i el món de les matemàtiques. Els ítems que són intra-matemàtics, on tots els elements implicats pertanyen al món de les matemàtiques, entren dins del context científic.
119. Els ítems d'avaluació de PISA s'organitzen en unitats que comparteixen un material d'estímul. Per tant, generalment en el cas que els ítems pertanyin a la mateixa unitat, pertanyen a la mateixa categoria de context. Es plantegen excepcions. Per exemple, el material d'estímul pot ser examinat des d'un punt de vista personal en un ítem i des d'un punt de vista social en un altre. En el cas inusual d'una unitat que involucri només construccions matemàtiques i que no faci referència a cap context fora de les matemàtiques, la unitat s'assignaria a la categoria de context científic.
120. L'ús d'aquestes categories de context proporciona la base per seleccionar una combinació de contextos dels ítems i garanteix que l'avaluació reflecteixi una àmplia gamma d'usos de les matemàtiques, que van des dels usos personals quotidians fins a les demandes científiques dels problemes globals. A més, és important que cada categoria de context es completi amb ítems d'avaluació que plantegin una àmplia gamma de dificultats. Atès que el propòsit principal d'aquestes categories de context és desafiar els estudiants

en una àmplia gamma de contextos problemàtics, cada categoria ha de contribuir substancialment al mesurament de la competència matemàtica. No ha de donar-se el cas que el nivell de dificultat dels ítems d'avaluació que representen una categoria de context sigui sistemàticament més alt o més baix que el nivell de dificultat dels ítems d'avaluació d'una altra categoria.

121. En identificar els contextos que poden ser rellevants, és fonamental tenir en compte que el propòsit de l'avaluació és mesurar l'ús del coneixement i les habilitats de contingut matemàtic que els estudiants han adquirit fins als 15 anys. Per tant, els contextos per als ítems d'avaluació se seleccionen perquè siguin rellevants per als interessos i les vides dels estudiants i les demandes que se'ls han d'imposar en ingressar a la societat com a ciutadans constructius, compromesos i reflexius. Els Project Managers dels països que participen en la prova PISA col·laboren en la valoració del grau de rellevància dels contextos.

Habilitats del segle XXI

122. Hi ha un creixent interès a tot el món en el que s'anomena habilitats del segle XXI i la seva possible inclusió en els sistemes educatius. L'OCDE ha tret una publicació centrada en tals habilitats i ha patrocinat un projecte de recerca titulat *The Future of Education and Skills: An OECD 2030 Framework*, en què uns 25 països participen en un estudi transnacional del pla d'estudis que inclou la incorporació d'aquestes habilitats. El projecte té com a eix central el que podria ser el currículum del futur, centrat inicialment en les matemàtiques i l'educació física.
123. Durant els últims 15 anys, més o menys, diverses publicacions han tractat d'aclarir la discussió i la consideració de les habilitats del segle XXI. Un resum dels informes clau i de la seva conceptualització de les habilitats del segle XXI es proporciona a *PISA 2021 Mathematics: A Broadened Perspective* (2017). Després d'una anàlisi acurada d'aquestes publicacions, els autors van recomanar que es puguin presentar arguments sòlids per injectar habilitats específiques de segle XXI en disciplines específiques. Per exemple, serà cada vegada més important ensenyar als estudiants a presentar arguments raonables i a assegurar-se que tinguin raó. Els arguments que formulin han de ser matemàticament rigorosos, basats en una teoria sòlida i prou forts com per resistir les crítiques, i no obstant això, sempre que sigui possible, han d'evitar referir-se a les autoritats (per exemple, "així es diu a Internet"). Això forma part de la competència fonamental per emetre judicis independents i responsabilitzar-se'n (OCDE, 2005). En el context social no n'hi ha prou amb tenir raó, s'ha de ser capaç de presentar arguments i d'estar a punt per defensar-los. Aprendre matemàtiques, amb la seva claredat de contextos i el seu fort èmfasi en el raonament lògic i el rigor en el nivell apropiat, és una oportunitat perfecta per practicar i desenvolupar la capacitat per emprendre aquest tipus d'argumentació.
124. De la mateixa manera, a l'era moderna és fonamental dotar els estudiants de les eines que poden utilitzar per defensar-se de les mentides. Molt sovint hi ha prou fluïdesa en el raonament lògic, una mentida sol amagar una

contradicció oculta. L'alerta de les ments joves cap a possibles contradiccions es pot desenvolupar amb més facilitat en bones classes de matemàtiques.

125. L'ús de la lògica per trobar la intersecció entre les habilitats genèriques del segle XXI i les habilitats relacionades però específiques de la matèria que són una part natural de la instrucció relacionada amb aquesta matèria dona com a resultat que s'identifiquin les vuit habilitats del segle XXI següents per a la seva inclusió en el marc conceptual de l'avaluació de la competència matemàtica PISA 2021:

- Pensament crític
- Creativitat
- Recerca i investigació
- Autonomia, iniciativa i persistència
- Ús de la informació
- Pensament sistèmic
- Comunicació
- Reflexió

3. AVALUACIÓ DE LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA

126. Aquesta part del marc conceptual descriu l'enfocament adoptat per implementar els elements descrits a les seccions anteriors. Això inclou l'estructura del component matemàtic de l'avaluació PISA, la distribució desitjada de la puntuació del raonament matemàtic i dels processos de resolució de problemes; la distribució de punts per categoria de contingut; els aclariments sobre la dificultat dels ítems; l'estructura de l'instrument d'avaluació; el paper de l'avaluació informàtica de les matemàtiques; el disseny dels ítems d'avaluació; i l'escala de nivells d'assoliment de la competència matemàtica.

Estructura de l'avaluació matemàtica a PISA 2021

127. D'acord amb la definició de competència matemàtica, els ítems d'avaluació utilitzats en qualsevol instrument que es desenvolupi com a part de l'avaluació PISA s'estableixen dins d'un context. Els ítems impliquen l'aplicació de conceptes matemàtics importants, de coneixements, comprensions i habilitats matemàtiques (coneixement del contingut matemàtic) al nivell adequat per a estudiants de 15 anys, tal com s'ha descrit més amunt. El marc conceptual s'utilitza per guiar l'estructura i el contingut de l'avaluació, i és important que l'instrument d'avaluació inclogui un equilibri adequat d'ítems que reflecteixin els components del marc de la competència matemàtica.

Distribució desitjada de la puntuació del raonament matemàtic i del procés de resolució de problemes

128. En la prova de matemàtiques PISA 2021, els ítems d'avaluació es poden assignar al raonament matemàtic o a un dels tres processos matemàtics associats amb la resolució de problemes matemàtics. En construir l'avaluació, l'objectiu pretès és aconseguir un equilibri que proporcioni una ponderació aproximadament igual entre els dos processos que impliquen establir una connexió entre el món real i el món matemàtic (formular i interpretar/avaluar) i el raonament matemàtic i utilitzar les matemàtiques, la qual cosa fa que els estudiants puguin treballar sobre un problema formulat matemàticament. Si bé és cert que el raonament matemàtic es pot observar dins del procés de formulació, l'ús dels ítems d'interpretació i d'utilització de les matemàtiques es tindrà en compte només en un sol domini.

Taula 1 – Distribució aproximada de la puntuació per domini cognitiu a PISA 2021

		Percentatge de puntuació a PISA 2021
Raonament matemàtic		Aproximadament 25
Resolució de problemes matemàtics	Formular situacions matemàticament.	Aproximadament 25
	Utilitzar conceptes, fets, procediments i raonament matemàtics.	Aproximadament 25
	Interpretar , aplicar i avaluar els resultats matemàtics.	Aproximadament 25
TOTAL		100

129. És important tenir en compte que els ítems de cada categoria del procés matemàtic han de tenir un rang de dificultat i una demanda matemàtica. Vegeu la **taula 3**.

Distribució desitjada de la puntuació segons la categoria de contingut

130. Els ítems de matemàtiques de PISA se seleccionen per reflectir el coneixement del contingut matemàtic descrit anteriorment en aquest marc conceptual. Els ítems de tendència seleccionats per a PISA 2021 es distribuiran entre les quatre categories de contingut, com es mostra a la **taula 2**. En construir la prova d'avaluació, l'objectiu pretès és obtenir una distribució d'ítems en la categoria de contingut que proporcioni una distribució de puntuació tan equilibrada com sigui possible, ja que tots aquests dominis són importants per als ciutadans constructius, compromesos i reflexius.

Taula 2 – Distribució aproximada de la puntuació obtinguda per categoria de contingut a PISA 2021

Categoria de contingut	Percentatge de puntuació a PISA 2021
Canvi i relacions	Aproximadament 25
Espai i forma	Aproximadament 25
Quantitat	Aproximadament 25
Incertesa i dades	Aproximadament 25
TOTAL	100

131. És important tenir en compte que els ítems de cada categoria de contingut han de tenir un rang de dificultat i de demanda matemàtica.

Rang de dificultat dels ítems

132. La prova de competència matemàtica PISA 2021 inclou ítems amb una àmplia gamma de dificultat, en paral·lel amb el rang d'habilitats dels estudiants de 15 anys. Inclou ítems que representen un repte per als alumnes més capaços i ítems adequats per als alumnes menys capaços en competència matemàtica. Des d'una perspectiva psicomètrica, una prova que

està dissenyada per mesurar un nombre particular d'individus és més eficaç i eficient quan la dificultat dels ítems d'avaluació coincideix amb la capacitat dels subjectes mesurats. A més, les escales de nivell de competència descrites que s'utilitzen com a part central de l'informe de resultats de PISA només poden incloure detalls útils per a tots els estudiants si els ítems a partir dels quals s'extreuen les descripcions de competència abasten el rang d'habilitats descrites.

133. La **taula 3** descriu el rang d'accions que s'esperen dels estudiants per avaluar el raonament matemàtic i cadascun dels processos de resolució de problemes. Aquestes llistes descriuen les accions que els ítems demanaran als estudiants. Per a cada categoria hi ha una sèrie d'ítems marcats amb ** per indicar les accions que s'esperen dels estudiants que se situaran en els nivells 1a, 1b i 1c i en el nivell 2 de l'escala de competència matemàtica. Els elaboradors s'han d'assegurar que hi hagi prou ítems als nivells inferiors de l'escala de rendiment per permetre que els estudiants situats en aquests nivells puguin mostrar el que són capaços de fer.
134. Per obtenir informació útil per als nous nivells inferiors, 1b i 1c, és vital que el context i el llenguatge no interfereixin amb les matemàtiques que s'avaluen. Amb aquesta finalitat, el context i el llenguatge han de ser considerats amb cura. No obstant, els ítems han de ser interessants per a evitar la possibilitat que els estudiants simplement no intentin resoldre els ítems perquè no hi tenen cap interès.
135. El context per als elements de nivell 1b i 1c ha de ser una situació en què els alumnes es trobin diàriament. Exemples d'aquests contextos poden incloure diners, temperatura, menjar, hora, data, pes, mida i distància. Tots els ítems han de ser concrets i no abstractes. L'enfocament de l'ítem ha de ser només matemàtic. La comprensió del context no ha d'interferir amb la resolució de l'ítem.
136. També és molt important tenir tots els ítems formulats en els termes més simples possibles. Les oracions han de ser curtes i directes. S'han d'evitar les oracions compostes, els substantius compostos i les oracions condicionals. El vocabulari utilitzat en els ítems s'ha d'examinar acuradament per garantir que els alumnes comprenguin clarament el que se'ls demana. A més, es prestarà especial atenció a garantir que no s'afegeix cap dificultat addicional a causa d'una gran càrrega de text o d'un context que pugui no ser familiar per als estudiants segons quin sigui el seu origen cultural.
137. Els ítems dissenyats per al nivell 1c només han de demanar un sol pas o operació. No obstant això, és important tenir en compte que un sol pas o operació no es limita a un pas aritmètic. Aquest pas es pot demostrar fent una selecció o identificant alguna informació. Tant el raonament matemàtic com tots els processos de resolució de problemes s'han d'usar per mesurar les capacitats de competència matemàtica dels estudiants situats en els nivells de l'escala de rendiment 1b i 1c.

Taula 3 – Accions esperades dels estudiants en el raonament matemàtic i cadascun dels processos de resolució de problemes⁶

Raonament
** Treure una conclusió simple.
** Seleccionar una justificació apropiada.
** Explicar per què un resultat o una conclusió matemàtica té o no té sentit, atès el context d'un problema.
Representar un problema d'una manera diferent, fins i tot organitzar-lo d'acord amb conceptes matemàtics i fer suposicions apropiades.
Utilitzar definicions, regles i sistemes formals, així com algoritmes i pensament computacional.
Explicar i defensar una justificació per a la representació identificada o ideada d'una situació del món real.
Explicar o defensar una justificació dels processos i procediments o simulacions utilitzades per determinar un resultat o una solució matemàtica.
Identificar els límits del model utilitzat per resoldre un problema.
Comprendre definicions, regles i sistemes formals i també fer servir algoritmes i raonament computacional.
Proporcionar una justificació per a la representació identificada o ideada d'una situació del món real.
Proporcionar una justificació dels processos i procediments utilitzats per determinar un resultat o una solució matemàtica.
Criticar els límits del model utilitzat per resoldre un problema.
Interpretar un resultat matemàtic en el context del món real per explicar el significat dels resultats.
Explicar les relacions entre el llenguatge específic del context d'un problema i el llenguatge simbòlic i formal necessari per a representar-lo matemàticament.
Reflexionar sobre arguments matemàtics, explicant i justificant el resultat matemàtic.
Reflexionar sobre solucions matemàtiques i trobar explicacions i arguments que hi donin suport, refutin o qualifiquin una solució matemàtica per a un problema contextualitzat.
Analitzar similituds i diferències entre un model computacional i el problema matemàtic que està modelant.
Explicar com funciona un algorisme simple, detectar i corregir errors en algoritmes i programes.

⁶ La taula 3 és una reformulació de la figura emprada en anteriors marcs conceptuals per enllaçar els processos matemàtics amb les habilitats matemàtiques. Tots els exemples d'aquesta figura anterior han estat inclosos en aquesta reformulació.

Formular	Utilitzar	Interpretar/avaluar
<p>** Seleccionar una descripció matemàtica o una representació que descrigui un problema.</p> <p>** Identificar les variables clau en un model.</p>	<p>** Fer un càlcul simple.</p> <p>** Seleccionar d'una llista una estratègia apropiada.</p>	<p>** Interpretar un resultat matemàtic en el context del món real.</p> <p>** Identificar si un resultat o una conclusió matemàtica té o no té sentit, donat el context d'un problema.</p>
<p>** Seleccionar una representació apropiada per al context del problema.</p> <p>Llegir, descodificar i donar sentit a declaracions, preguntes, tasques, objectes o imatges per crear un model de la situació.</p>	<p>** Implementar una estratègia donada per determinar una solució matemàtica.</p> <p>** Fer diagrames matemàtics, gràfics, construccions o artefactes informàtics.</p>	<p>** Identificar els límits del model utilitzat per resoldre un problema.</p> <p>Utilitzar eines matemàtiques o simulacions per ordinador per determinar la raonabilitat d'una solució matemàtica i els límits i restriccions d'aquesta solució, donat el context del problema.</p>
<p>Reconèixer l'estructura matemàtica (incloent-hi regularitats, relacions i patrons) en problemes o situacions.</p> <p>Identificar i descriure els aspectes matemàtics d'una situació problemàtica del món real, inclosa la identificació de les variables significatives.</p>	<p>Comprendre i utilitzar construccions basades en definicions, regles i sistemes formals, incloent-hi l'ús d'algorismes familiars.</p> <p>Desenvolupar diagrames matemàtics, gràfics, construccions o artefactes informàtics i treure'n informació matemàtica.</p>	<p>Interpretar els resultats matemàtics en una varietat de formats en relació amb una situació o ús; comparar o avaluar dues o més representacions en relació amb una situació.</p> <p>Utilitzar el coneixement de com el món real afecta els resultats i càlculs d'un procediment o model matemàtic per fer judicis contextuals sobre com s'han d'ajustar o aplicar-se els resultats.</p>
<p>Simplificar o descompondre una situació o problema perquè sigui susceptible d'anàlisi matemàtica.</p>	<p>Manipular nombres, dades i informació gràfica i estadística, expressions algebraiques i equacions i representacions geomètriques.</p>	<p>Construir i comunicar explicacions i arguments en el context del problema.</p>
<p>Reconèixer aspectes d'un problema que es corresponen amb problemes coneguts o conceptes, fets o procediments matemàtics.</p>	<p>Articular una solució, mostrant i/o resumint i presentant resultats matemàtics intermedis.</p>	<p>Reconèixer [demostrar, interpretar, explicar] l'abast i els límits dels conceptes matemàtics i les solucions matemàtiques.</p>

Formular	Utilitzar	Interpretar/avaluar
Traduir un problema a una representació matemàtica estàndard o algoritme.	Utilitzar eines matemàtiques, incloent-hi la tecnologia, simulacions i pensament computacional, per ajudar a trobar solucions exactes o aproximades.	Comprendre la relació entre el context del problema i la representació de la solució matemàtica. Utilitzar aquesta comprensió per ajudar a interpretar la solució en un context i avaluar la viabilitat i les possibles limitacions de la solució.
Utilitzar eines matemàtiques (utilitzant variables apropiades, símbols, diagrames) per descriure les estructures matemàtiques i/o les relacions en un problema.	Donar sentit, relacionar i fer servir una varietat de representacions quan interactuen amb un problema.	
Aplicar eines matemàtiques i eines informàtiques per representar relacions matemàtiques.	Canviar entre diferents representacions en el procés de trobar solucions.	
Identificar les restriccions, les suposades simplificacions en un model matemàtic.	Utilitzar un procediment de diversos passos que condueixi a una solució matemàtica, conclusió o generalització.	
	Utilitzar una comprensió del context per guiar o accelerar el procés de resolució matemàtica, per exemple, treballar a un nivell de precisió apropiat per al context.	
	Fer generalitzacions basades en els resultats de l'aplicació de procediments matemàtics per trobar solucions.	

Avaluació de les matemàtiques basada en ordinador

138. La principal manera d'aplicar l'avaluació a PISA 2021 serà l'avaluació informatitzada de les matemàtiques (CBAM). La transició es va anticipar amb els estudis de 2015 i 2018, que també es van aplicar per ordinador. Per tal de mantenir les tendències dels estudis, les avaluacions de 2015 i 2018 no van ser informatitzades malgrat l'ús d'un mètode de lliurament informatitzat. La transició a una CBAM completa al 2021 ofereix una gamma d'oportunitats per desenvolupar l'avaluació de la competència matemàtica perquè estigui més ben alineada amb la naturalesa evolutiva de les matemàtiques en el món modern, alhora que garanteixi l'ús de tendències dels cicles anteriors. Aquestes oportunitats inclouen nous formats d'ítems (per exemple, arrossegat i deixar anar); presentar als estudiants dades del món real (com conjunts de dades grans i ordenades); crear models matemàtics o simulacions que els estudiants poden explorar canviant els valors de les variables; ajustar la corba i usar-la de manera més ajustada per fer

prediccions. A més de proporcionar una àmplia gamma de tipus de preguntes i d'oportunitats matemàtiques, la CBAM també permet l'avaluació adaptativa.

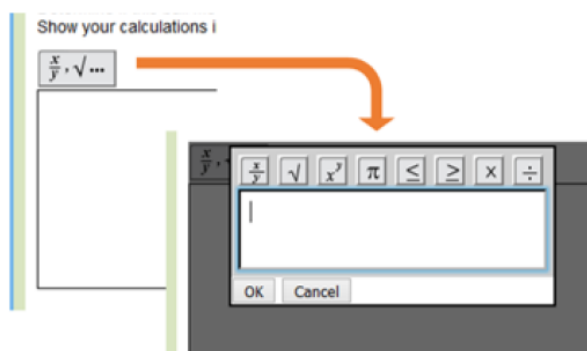
139. La capacitat d'avaluació adaptativa de la CBAM, que es va implementar prèviament en l'avaluació de la comprensió lectora de PISA 2018, brinda l'oportunitat de descriure millor què és el que poden fer els estudiants situats en els dos extrems de l'escala de rendiment. En proporcionar als estudiants un augment de combinacions individualitzades d'unitats de prova segons les seves respostes i puntuacions a les unitats primerenques a les quals responen, es genera informació cada vegada més detallada sobre les característiques de rendiment dels estudiants situats en els dos extrems de l'escala de rendiment.
140. Fer ús dels avantatges que ofereix la tecnologia informàtica dona com a resultat ítems d'avaluació més atractius per als estudiants, més acolorits i més fàcils d'entendre. Per exemple, als estudiants se'ls pot presentar un estímul mòbil, unes representacions d'objectes tridimensionals que poden rotar o un accés més flexible a la informació rellevant. Els nous formats d'ítems, com els que demanen als estudiants que "arrossequin i deixin anar" informació o que utilitzin "punts calents" en una imatge, estan dissenyats per atraure els estudiants, permeten una gamma més àmplia de tipus de resposta i ofereixen una imatge més completa de la competència matemàtica. Un desafiament clau és garantir que aquests ítems continuïn avaluant la competència matemàtica i que la interferència de les dimensions irrellevants del domini es mantingui al mínim.
141. Les investigacions mostren que les demandes matemàtiques de la feina ocorren cada vegada més en presència de tecnologia electrònica, de manera que l'educació matemàtica i l'ús de l'ordinador es combinen (Hoyle *et al.*, 2002). Per als empleats de qualsevol nivell, en el lloc de treball ara hi ha una interdependència entre el coneixement matemàtic i l'ús de la tecnologia informàtica. Un desafiament clau és distingir les demandes matemàtiques d'un ítem PISA basat en ordinador de les demandes no relacionades amb la competència matemàtica, com ara les demandes de tecnologia de la informació i les comunicacions (TIC) de l'ítem i el format de presentació. Resoldre els ítems de PISA en un ordinador en lloc de fer-ho en paper fa que PISA se situï de ple en la realitat i en les demandes del segle XXI.
142. Les preguntes que semblen adequades per a la CBAM i la naturalesa evolutiva de la competència matemàtica inclouen:
 - Una simulació en què s'ha establert un model matemàtic i on els estudiants poden canviar els valors de les variables per explorar l'impacte de les variables per crear "una solució òptima".
 - Ajustar una corba (seleccionant una corba d'un conjunt limitat de corbes proporcionades) a un conjunt de dades o a una imatge geomètrica per determinar el "millor ajust" i usar la corba de millor ajust resultant per determinar la resposta a una pregunta.

- Situacions de pressupost (per exemple, una botiga en línia), en què l'estudiant ha de seleccionar combinacions de productes per complir amb una gamma d'objectius amb un pressupost determinat.
 - Una simulació de compra, en què l'estudiant tria entre diferents préstecs i combina opcions de pagament per comprar un article usant un préstec i respectant un pressupost. El repte del problema és entendre com interaccionen les variables.
 - Problemes que inclouen la codificació visual per aconseguir una seqüència determinada d'accions.
143. Tot i les oportunitats que presenta la CBAM (descrites anteriorment), és important que la CBAM estigui enfocada en l'avaluació de la competència matemàtica i no canviï a l'avaluació de les habilitats de les TIC. De la mateixa manera, és important que les simulacions i les altres preguntes insinuades abans no siguin tan "sorolloses" que es perdin els processos de raonament matemàtic i de resolució de problemes.
144. La CBAM també ha de conservar algunes de les característiques de la versió en paper, per exemple, la revisió d'ítems ja contestats, encara que tenint en compte el context adaptatiu de les proves, això es limitarà a la unitat en la qual l'estudiant està treballant.

Disseny dels ítems de matemàtiques de PISA 2021

145. Per avaluar la competència matemàtica a PISA 2021, s'utilitzen tres tipus de format d'ítems: ítems de resposta construïda oberta, de resposta construïda tancada i de resposta d'opció múltiple.
- Els ítems de resposta construïda oberta requereixen de l'estudiant una resposta escrita una mica llarga. Aquests ítems també poden demanar a l'estudiant que mostri els passos seguits o que expliqui com va aconseguir la resposta. Aquests ítems requereixen experts entrenats per codificar manualment les respostes dels estudiants. Per facilitar la funció d'avaluació adaptativa de la CBAM, caldrà minimitzar la quantitat d'ítems que depenen d'experts capacitats per codificar les respostes dels alumnes.
 - Els ítems de resposta construïda tancada proporcionen un entorn més estructurat per presentar solucions de problemes i produeixen una resposta de l'estudiant que pot ser considerada fàcilment com a correcta o incorrecta. Sovint, les respostes dels estudiants a preguntes d'aquest tipus es poden codificar automàticament. Les respostes construïdes tancades més freqüents són simples nombres.
 - Els ítems de resposta d'opció múltiple requereixen l'elecció d'una o més respostes d'una sèrie d'opcions de resposta. Les respostes a aquestes preguntes solen processar-se automàticament. Per construir els instruments de la prova, s'utilitza un nombre aproximadament igual d'aquests tipus de format d'ítems.

146. La prova de matemàtiques PISA està constituïda per unitats d'avaluació que comprenen material d'estímul escrit i altra informació com taules, quadres, gràfics o diagrames, amb un o més ítems vinculats a aquest material d'estímul comú. Aquest format brinda als estudiants l'oportunitat d'involucrar-se en un context o un problema responent a una sèrie d'ítems que s'hi relacionen.
147. Els ítems seleccionats per a la seva inclusió en la prova PISA representen una àmplia gamma de dificultats, per coincidir amb la gran quantitat de capacitats dels estudiants que participen en l'avaluació. A més, totes les categories principals de l'avaluació (les categories de contingut, les categories de processos de raonament matemàtic i de resolució de problemes i les diferents categories de context i d'habilitats del segle XXI) estan representades, en la mesura del possible, amb ítems d'una àmplia gamma de dificultats. Les dificultats dels ítems s'estableixen com una de les moltes propietats de mesura en una prova de camp (pilotatge) abans que els ítems se seleccionin per a la prova definitiva de PISA. Els ítems se seleccionen per a la seva inclusió en els instruments definitius de la prova PISA d'acord amb la seva idoneïtat amb les categories del marc conceptual i amb les seves propietats de mesura.
148. A més, el nivell de lectura requerit per interactuar amb èxit amb un ítem es considera molt acuradament en el desenvolupament i la selecció d'ítems. Un objectiu en el desenvolupament d'ítems és fer que la redacció dels ítems sigui al més simple i directa possible. També es va amb compte d'evitar els contextos d'ítems que crearien un biaix cultural i totes les opcions es verifiquen amb els equips nacionals. La traducció dels ítems a molts idiomes es fa amb molta cura, amb una minuciosa revisió posterior i altres protocols.
149. PISA 2021 inclourà una eina que permetrà als alumnes proporcionar respostes tipificades d'ítems de resposta construïda i mostrar el seu treball segons el que sigui necessari per a la competència matemàtica. L'eina permet als estudiants introduir tant text com nombres. En prémer un botó, els estudiants poden introduir una fracció, una arrel quadrada o un exponent. També hi ha símbols addicionals com π i \geq/\leq , i també operadors com ara signes de multiplicació i divisió. A la **figura 3** es mostra un exemple de pantalla.

Figura 3 – Exemple d'eines d'edició de PISA 2021

150. També s'espera que el conjunt d'eines disponibles per als estudiants inclogui una calculadora científica bàsica. Els operadors que s'inclouran són la suma, la resta, la multiplicació i la divisió, així com l'arrel quadrada, π , els parèntesis, l'exponent, el quadrat, la fracció (i/x), la inversa ($1/x$). La calculadora es programarà per respectar l'ordre d'operacions estàndard.
151. Els estudiants que responguin l'avaluació en paper poden tenir accés a una calculadora de mà, com la que utilitzen els alumnes de 15 anys d'edat en els seus respectius sistemes escolars.

Puntuació de l'ítem

152. Si bé la majoria dels ítems es puntuen de manera dicotòmica (és a dir, les respostes s'atorguen amb puntuació o sense puntuació), els ítems oberts de resposta construïda a vegades poden implicar una qualificació parcial, cosa que permet que s'assignin codis de acord amb diferents graus de "correcció" de respostes i/o en la mesura que un ítem s'ha intentat resoldre o no. La necessitat d'una puntuació parcial serà particularment important per als ítems de raonament matemàtic, que poques vegades implicaran la producció d'una resposta amb una sola xifra, sinó respostes amb un o més elements.

Informació dels resultats de la competència matemàtica

153. Els resultats de la prova d'avaluació de matemàtiques PISA s'informen de diverses maneres. S'obtenen estimacions de la competència matemàtica mitjana per als estudiants inclosos en la mostra de cada país participant, i es defineixen diversos nivells de competència. També es desenvolupen descripcions del grau de competència matemàtica dels estudiants situats en cada nivell. Per a PISA 2021, els sis nivells de competència matemàtica descrits en cicles anteriors s'ampliaran de la manera següent: el nivell 1 passarà a dir-se nivell 1a, i la taula que descriu les competències s'ampliarà per incloure els nivells 1b i 1c. Aquests nivells addicionals s'han agregat per

proporcionar una major estratificació dels resultats dels estudiants situats a l'extrem inferior de l'escala de competència matemàtica.

154. A més de l'escala global de matemàtiques, es desenvolupen escales de competència addicionals després de la prova de camp i, a continuació, es registren. Aquestes escales addicionals són per al raonament matemàtic i per als tres processos de resolució de problemes matemàtics: *formular situacions matemàticament; utilitzar conceptes, fets, procediments i raonaments matemàtics; i interpretar, aplicar i avaluar els resultats matemàtics.*

La competència matemàtica i els qüestionaris de context

155. Des del primer cicle de PISA, els qüestionaris de context de l'estudiant i de l'escola han tingut dos propòsits interrelacionats al servei de l'objectiu més ampli d'avaluar els sistemes educatius. En primer lloc, els qüestionaris proporcionen un context per interpretar els resultats de PISA tant dins d'un sistema educatiu com entre sistemes educatius. En segon lloc, el propòsit dels qüestionaris és proporcionar una mesura fiable i vàlida d'altres indicadors educatius, per donar informació a les polítiques educatives i a la recerca educativa.

156. Atès que la competència matemàtica és el domini principal en la prova de PISA 2021, s'espera que els qüestionaris de context no només proporcionin dades de tendències per als constructes que es continuen avaluant, sinó que a més proporcionin abundant informació sobre les innovacions que són evidents en el marc de la competència matemàtica de PISA 2021. En particular, s'espera que la competència matemàtica aparegui de manera prominent en l'anàlisi de les construccions contextuais específiques del domini, així com en diverses categories diferents de l'enfocament de polítiques específiques que van des de variables de nivell individual, com la demografia i les característiques socials i emocionals, fins a pràctiques, polítiques i infraestructures escolars (OCDE, 2018).

157. En l'avaluació de matemàtiques PISA 2012 ja es van identificar dues àrees com a àrees d'interès potencial per determinar quines actituds dels estudiants els predisposen a la implicació productiva en matemàtiques. Aquestes àrees són l'interès dels estudiants per les matemàtiques i la seva voluntat d'implicar-s'hi. Es preveu que aquestes àrees continuïn sent un focus rellevant dels qüestionaris de PISA 2021.

158. L'interès per les matemàtiques té components relacionats amb l'activitat present i futura. Les preguntes rellevants es focalitzen en l'interès dels estudiants en les matemàtiques a l'escola, perquè les veuen útils per a la vida real o perquè tenen intencions d'emprendre estudis addicionals en matemàtiques i estudiar carreres orientades a les matemàtiques. Hi ha una preocupació internacional sobre aquest tema, perquè en molts països participants a PISA s'observa una disminució en el percentatge d'estudiants que trien estudis futurs relacionats amb les matemàtiques, mentre que hi ha una necessitat creixent de tenir persones graduades en aquestes àrees.

159. La disposició dels estudiants per fer matemàtiques es relaciona amb les actituds, les emocions i les creences autorelacionades que fan que els estudiants es beneficiïn de la competència matemàtica que han assolit o que els impedeixin beneficiar-se'n. Els estudiants que gaudeixen de l'activitat matemàtica i que se senten confiats per fer-la tenen més probabilitats d'utilitzar les matemàtiques per pensar en les situacions que es troben en les diverses facetes de la vida, a dins i a fora de l'escola. Entre els conceptes de la prova PISA que són rellevants per a aquesta àrea s'inclouen les emocions de gaudir, la confiança i (la manca de) l'ansietat matemàtica, i les creences relacionades amb l'autoconcepte i l'autoeficàcia. Una anàlisi del progrés posterior dels joves australians de 15 anys que van obtenir una qualificació baixa a PISA va mostrar que aquells que "reconeixen el valor de les matemàtiques per al seu èxit futur són més propensos a aconseguir aquest èxit, i això inclou sentir-se feliç amb molts aspectes de la seva vida personal així com amb el seu futur i els estudis posteriors" (Hillman i Thomson, 2010: 31). L'estudi de Hillman i Thomson puntualitza que un enfocament en les aplicacions pràctiques de les matemàtiques a la vida quotidiana pot ajudar a millorar la perspectiva d'aquests estudiants de baix rendiment.
160. Les innovacions en el marc conceptual de matemàtiques de PISA 2021 apunten a almenys quatre àrees en què els qüestionaris de context poden proporcionar dades interessants. Aquestes àrees són: el **raonament matemàtic**; el **pensament computacional** i el paper de la tecnologia tant a l'hora de fer com a l'hora d'ensenyar les matemàtiques; les **quatre àrees de contingut focal**; i les **habilitats del segle XXI en el context de les matemàtiques**.

Raonament matemàtic

161. El marc conceptual de matemàtiques de PISA 2021 destaca el raonament matemàtic permès per certes comprensions clau subjacents en les matemàtiques escolars (entendre la quantitat, els sistemes de numeració i les seves propietats algebraiques; apreciar el poder de l'abstracció i la representació simbòlica; veure les estructures matemàtiques i les seves regularitats; reconèixer les relacions funcionals entre les quantitats; utilitzar el modelatge matemàtic com a lent per acostar-nos al món real; i entendre la variació com el cor de l'estadística).
162. Posar el focus en el raonament té implicacions en la concepció dels qüestionaris de context, que haurien de proporcionar mesures per entendre les oportunitats dels estudiants per aprendre a raonar matemàticament i fer servir els coneixements clau de les matemàtiques de l'escola. En particular, els qüestionaris han d'establir la freqüència amb què els estudiants poden, per exemple:
- Identificar, reconèixer, organitzar, connectar i representar.
 - Construir, abstroure, avaluar, deduir, justificar, explicar i defensar.
 - Interpretar, fer judicis, criticar, refutar i qualificar.

163. A més d'establir la freqüència de les oportunitats (d'aprendre) per raonar, els qüestionaris haurien de tenir present quines formes prenen aquestes oportunitats (verbals o escrites).
164. Finalment, pel que fa al raonament, els qüestionaris han de tenir una idea de la disposició dels estudiants a persistir en les tasques que involucren el raonament.
165. En el cas dels professors i de la docència, cal entendre millor com veuen el paper del raonament en les matemàtiques en general i en les seves pràctiques d'ensenyament i avaluació en particular.

Pensament computacional

166. Els aspectes del pensament computacional formen una dimensió, tant de la matemàtica com de la competència matemàtica, en evolució i creixement ràpids. El marc de la competència matemàtica PISA 2021 il·lustra com el pensament computacional és part tant de fer matemàtiques com d'impactar en fer matemàtiques. *Els valors i les creences sobre l'aprenentatge* i els mòduls de *mentalitat oberta* dels qüestionaris de context poden explorar l'experiència dels estudiants en el paper que fa el pensament computacional en la realització de matemàtiques.
167. El marc de la competència matemàtica PISA 2021 fixa l'atenció en les diferents maneres en què la tecnologia està canviant el món on vivim (proporcionant més accés a dades més detallades de maneres diverses) i canviant el que significa fer matemàtiques. Les preguntes clau per als qüestionaris inclouen desenvolupar una primera comprensió de com canvien (si és que canvien) les experiències i pràctiques matemàtiques dels estudiants i, en segon lloc, quina és l'evolució de la pedagogia a l'aula a causa de l'impacte de la tecnologia en la nostra exposició a les matemàtiques i als artefactes matemàtics i què significa fer matemàtiques. En el cas dels estudiants, és interessant comprendre millor l'impacte de la tecnologia en el rendiment, que es podria explorar en el mòdul del qüestionari que pregunta com es fan les tasques. Es podrien explorar qüestions pedagògiques tant en els mòduls dedicats al temps d'aprenentatge com al currículum i a les pràctiques docents.
168. El focus en el pensament computacional i el paper de la tecnologia tant en la realització com en l'ensenyament de les matemàtiques té implicacions en els qüestionaris de context, que haurien de proporcionar mesures per entendre millor les oportunitats dels estudiants d'aprendre en aquest sentit. En particular, els qüestionaris han d'establir la freqüència amb què els estudiants, per exemple:
- Dissenyen o treballen amb simulacions i models informàtics.
 - Codifiquen o programen, tant a dins de l'aula de matemàtiques com a fora.
 - Estan exposats a sistemes de matemàtiques per ordinador (CSM) (inclosos programes de geometria dinàmica, fulls de càlcul,

programari de programació com ara Logo i Scratch; calculadores gràfiques; jocs, etc.).

Quatre àrees de contingut focal

169. En reconeixement al món canviant, el marc de matemàtiques PISA 2021 ha suggerit que quatre àrees de contingut dins de les categories de contingut existents rebin un enfocament especial. Aquestes àrees de contingut són: els fenòmens de creixement (canvi i relacions); l'aproximació geomètrica (espai i forma); les simulacions per ordinador (quantitat); i la presa de decisions condicionades (incertesa i dades). Posar el focus en aquestes àrees de contingut té implicacions en els qüestionaris de context, que haurien de proporcionar mesures per entendre millor les oportunitats dels estudiants d'aprendre en aquest sentit. En particular, els qüestionaris haurien d'establir la freqüència amb què els estudiants estan exposats a aquests continguts i les diferents maneres que prenen aquestes oportunitats.

Habilitats del segle XXI en el context de les matemàtiques

170. El marc conceptual de la competència matemàtica PISA 2021 introdueix un conjunt particular d'habilitats del segle XXI, com un resultat i com un enfocament de les matemàtiques. Els qüestionaris de context podrien examinar de manera productiva si les matemàtiques contribueixen o no al desenvolupament d'aquestes habilitats i si les pràctiques d'ensenyament hi estan centrades. En particular, el mòdul de temps d'aprenentatge i currículum del qüestionari podria explorar si aquestes habilitats apareixen o no en el pla d'estudis vigent en cada sistema educatiu.

171. Els resultats de l'avaluació PISA 2021 proporcionaran informació important per als responsables de les polítiques educatives dels països participants sobre el rendiment i l'actitud dels estudiants de 15 anys. En combinar la informació de l'avaluació PISA de la competència matemàtica amb la informació del qüestionari sobre les actituds, les emocions i les creences que predisposen els estudiants a utilitzar la seva competència matemàtica, així com amb l'impacte de les quatre àrees de contingut descrites anteriorment, PISA farà emergir una imatge més completa.

4. RESUM

172. El marc conceptual de la competència matemàtica PISA 2021, al mateix temps que manté la coherència amb els marcs de competència matemàtica anteriors, reconeix que el món està canviant constantment i, amb això, l'existència d'una demanda de ciutadans competents matemàticament per raonar matemàticament, en lloc de reproduir tècniques matemàtiques com rutines.
173. L'objectiu de PISA en la competència matemàtica és desenvolupar indicadors que mostrin que, efectivament, els països estan preparant els estudiants per a usar les matemàtiques en l'aspecte quotidià de la seva vida personal, cívica i professional, com a ciutadans constructius, compromesos i reflexius del segle XXI. Per aconseguir-ho, PISA ha desenvolupat una definició de competència matemàtica i un marc conceptual de l'avaluació que reflecteix els components importants d'aquesta definició.
174. Els ítems de l'avaluació de matemàtiques seleccionats per a la seva inclusió a PISA 2021, basats en aquesta definició i marc conceptual, pretenen reflectir un equilibri entre el raonament matemàtic, els processos de resolució de problemes, el contingut matemàtic i els contextos.
175. El disseny de l'avaluació assegurarà la validesa de la mesura de la capacitat dels estudiants en incloure dos nivells inferiors més en l'escala de rendiment anterior, conservant, això sí, la qualitat i el contingut de l'avaluació.
176. Per ser utilitzada des de 2021, la CBAM planteja els problemes que s'han de resoldre en una varietat de formats d'ítems, que tenen diferents graus d'orientació i d'estructura, i posa l'èmfasi en problemes autèntics que requereixen que els estudiants raonin i demostrin el seu pensament.

5. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Ananiadou, K. i M. Claro (2009), "21st Century Skills and Competences for New Millennium Learners in OECD Countries", *OECD Education Working Papers*, No. 41, OECD Publishing, Paris, <http://dx.doi.org/10.1787/218525261154>.

Basu, S. *et al.* (2016), "Identifying middle school students' challenges in computational thinking-based science learning", *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*, Vol. 11/3, <http://dx.doi.org/10.1186/s41039-016-0036-2>.

Beheshti, E. *et al.* (2017), *Computational Thinking in Practice: How STEM Professionals Use CT in Their Work*, Northwestern University, San Antonio, Texas, <http://ccl.northwestern.edu/papers.shtml>.

Beloit College (2017), *The Beloit College Mindset List for the Class of 2021*, <https://www.beloit.edu/mindset/2021/>.

Benton, L. *et al.* (2017), "Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England", *Digital Experiences in Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 115-138, <http://dx.doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x>.

Box, G. i N. Draper (1987), *Empirical Model-Building and Response Surfaces*, John Wiley.

Brennan, K. i M. Resnick (2012), *New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking*, https://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA2012_CT.pdf.

Devlin, K. (1994), *Mathematics: The Science of Patterns : The Search for Order in Life, Mind, and the Universe*, W H Freeman & Co.

Fadel, C., M. Bialik i B. Trilling (2015), *Four-Dimensional Education: The Competencies Learners Need to Succeed*, CreateSpace Independent Publishing Platform.

Gadanidis, G. (2015), *Coding for Young Mathematicians*, Western University, London, Ontario, Canada, <http://worlddiscoveries.ca/technology/18155>.

Gadanidis, G., E. Clements id C. Yiu (2018), "Group Theory, Computational Thinking, and Young Mathematicians", *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 20/1, pp. 32-53, <http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2018.1403542>.

Galbraith, P., H. Henn i M. Niss (eds.) (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education*, Springer US, <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>.

- Grover, S. (2018), *The 5th 'C' of 21st Century Skills? Try Computational Thinking (Not Coding)* | EdSurge News, <https://www.edsurge.com/news/2018-02-25-the-5th-c-of-21stcentury-skills-try-computational-thinking-not-coding>.
- Hillman, K. i S. Thomson (2010), *Against the odds: influences on the post-school success of 'low performers'*, NCVER, Adelaide, Australia, <https://www.ncver.edu.au/publications/publications/all-publications/against-the-oddsinfluences-on-the-post-school-success-of-low-performers#>.
- Hoyles, C. *et al.* (2002), "Mathematical skills in the workplace: final report to the Science Technology and Mathematics Council", *Institute of Education, University of London; Science, Technology and Mathematics Council, London.* (2002), <http://discovery.ucl.ac.uk/1515581/>.
- Mahajan, S. *et al.* (2016), *PISA Mathematics in 2021*, Center for Curriculum Redesign, <http://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Recommendations-for-PISA-Maths2021-FINAL-EXTENDED-VERSION-WITH-EXAMPLES-CCR.pdf>.
- Moore, D. (1997), "New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics", *International Statistical Review*, Vol. 65/2, pp. 123-165, <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/j.1751-5823.1997.tb00390.x>.
- National Research Council (2012), *Education for Life and Work: Developing Transferable Knowledge and Skills in the 21st Century*, The National Academies Press, Washington D.C., https://www.nap.edu/resource/13398/dbasse_070895.pdf
- Niemelä, P. *et al.* (2017), *Computational thinking as an emergent learning trajectory of mathematics*, ACM Press, New York, New York, USA, <http://dx.doi.org/10.1145/3141880.3141885>.
- OCDE (2018), *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science*.
- OCDE (2017a), *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving*, OECD Publishing, Paris, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en>
- OCDE (2017b), *PISA for Development Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science, Preliminary Version*, OECD Publishing, Paris, <http://www.oecd.org/about/publishing/corrigenda.htm>.
- OCDE (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework*, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>.
- OCDE (2005), *The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary*, OECD, Paris, <http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf>.

- OCDE (2004), *The PISA 2003 Assessment Framework*, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264101739-en>.
- Pei, C., D. Weintrop i U. Wilensky (2018), "Cultivating Computational Thinking Practices and Mathematical Habits of Mind in Lattice Land", *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 20/1, pp. 75-89, <http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2018.1403543>.
- Pratt, D. i R. Noss (2002), "The Microevolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness", *Journal of the Learning Sciences*, Vol. 11/4, pp. 453-488, http://dx.doi.org/10.1207/S15327809JLS1104_2.
- Rambally, G. (2017), *Applications of Computational Matrix Algebra*, AACE, Austin, Texas, <https://www.learntechlib.org/p/177277/>.
- Reimers, F. i C. Chung (2016), *Teaching and Learning for the Twenty-First Century : Educational Goals, Policies, and Curricula from Six Nations*, Harvard Education Press, Cambridge, MA.
- Resnick, M. *et al.* (2009), "Scratch: Programming for all", *Communications of the ACM*, Vol. 52/11, p. 60, <http://dx.doi.org/10.1145/1592761.1592779>.
- Steen, L. (1990), *On the Shoulders of Giants*, National Academies Press, Washington, D.C., <http://dx.doi.org/10.17226/1532>.
- Watson, J. i R. Callingham (2003), "Statistical literacy: A Complex hierarchical construct", *Statistics Education Research Journal*, Vol. 2, pp. 3-46.
- Weintrop, D. *et al.* (2016), "Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms", *Journal of Science Education and Technology*, Vol. 25/1, pp. 127-147, <http://dx.doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5>.
- Weintrop, D. i U. Wilensky (2015), *To block or not to block, that is the question*, ACM Press, New York, New York, USA, <http://dx.doi.org/10.1145/2771839.2771860>.
- Wing, J. (2006), *Computational Thinking*, *Communications of the ACM*, Vol. 49, No. 3, March 2006, pp. 33–35.
- Wing, J. (2008), *Computational thinking and thinking about computing*, *Philosophical Transactions of The Royal Society A*, 366: 3717-3725.
- Wing, J. (2011), *Computational Thinking – What and Why?*, The Magazine of Carnegie Mellon University's School of Computer Science, Research Notebook. <https://www.cs.cmu.edu/link/research-notebook-computational-thinking-what-and-why>

ANNEX A. EXEMPLES IL·LUSTRATIUS

177. Els ítems inclosos en aquest annex il·lustren alguns dels nous elements més importants del marc conceptual. Amb l'objectiu de garantir la preservació de la tendència en l'anàlisi de resultats, la majoria d'ítems de PISA 2021 seran ítems que s'han utilitzat en les anteriors avaluacions PISA. Hi ha un conjunt més ampli d'ítems a <http://www.oecd.org/pisa/test>.

178. Els ítems que es proporcionen en aquest annex il·lustren alguns dels nous elements següents:

- L'avaluació del raonament matemàtic tal i com es descriu en el marc conceptual.
- Les quatre àrees temàtiques de contingut que s'han identificat amb especial èmfasi en l'avaluació PISA 2021: els fenòmens de creixement, les aproximacions geomètriques, les simulacions informàtiques i la presa de decisions condicional.
- El rang de les característiques dels ítems que són possibles gràcies a l'avaluació informatitzada de les matemàtiques (CBAM).
- El pensament computacional.

179. Els set exemples il·lustratius que es proporcionen en aquest annex inclouen:

- **ÚS DEL TELÈFON INTEL·LIGENT.** Aquest exemple il·lustra les capacitats CBAM, en particular la capacitat d'ordenar la informació dels fulls de càlcul i altres capacitats.
- **LA BELLESA DE LES POTÈNCIES.** Aquest exemple il·lustra una gamma d'ítems de raonament matemàtic, des del més senzill al més complex en un context matemàtic. Indica també fenòmens de creixement, tot i que, per ser justos, el context d'aquest exemple està més centrat en el raonament i el reconeixement de patrons que en el creixement.
- **SEMPRE ALGUNES VEGADES MAI.** Aquest exemple il·lustra una gamma d'ítems de raonament, des del més senzill fins al més complex, incloent-hi una gamma de tipus d'ítems que van des del de resposta de sí/no a l'opció múltiple i a ítems de resposta construïda oberta.
- **ENRAJOLAT.** Aquest exemple il·lustra el raonament i el pensament computacionals. I les representacions geomètriques.
- **DECISIÓ DE COMPRA.** Aquest exemple il·lustra l'aplicació de la presa de decisions condicionades.
- **NAVEGACIÓ.** Aquest exemple il·lustra el raonament en un context geomètric i les capacitats CBAM en els ítems.
- **SIMULACIÓ D'ESTALVIS.** Aquest exemple il·lustra l'ús d'una simulació informàtica i assessora sobre el creixement en el context i l'impacte de l'interès.

ÚS DE TELÈFONS INTEL·LIGENTS







Smartphone use

Introduction

Read the introduction. Then click on the NEXT arrow.

SMARTPHONE USE

The spreadsheet shows the population (in millions) and the number of smartphone users (in millions) for a range of countries in Asia. The data has been sorted by country name.

Column A 	Column B 	Column C 	Column D 
Country	Population (in millions)	Number of smartphone users (in millions)	
Bangladesh	166.735	8.921	
Indonesia	266.357	67.57	
Japan	125.738	65.282	
Malaysia	31.571	20.98	
Pakistan	200.663	23.228	
Philippines	105.341	28.627	
Thailand	68.416	30.486	
Turkey	81.086	44.771	
Vietnam	96.357	29.043	



Smartphone use

Question 1/3

Refer to “Smartphone use” on the right. Click on a choice to answer the question.

Which operation on columns B and C will determine the correct values in Column D?

For each country:

- Divide the Column B value by the Column C value:

$$B / C$$

- Divide the sum of the Column B and Column C values by the Column C value:

$$(B + C) / C$$

- Divide the Column C value by the Column B value:





$$C / B$$

- Divide the Column B value by the sum of the Column B and Column C values:

$$B / (B + C)$$

SMARTPHONE USE

The spreadsheet shows the population (in millions) and the number of smartphone users (in millions) for a range of countries in Asia. The data has been sorted by country name.

Column A	Column B	Column C	Column D
			
Country	Population (in millions)	Number of smartphone users (in millions)	Proportion of smartphone users
Bangladesh	166.735	8.921	
Indonesia	266.357	67.57	
Japan	125.738	65.282	
Malaysia	31.571	20.98	
Pakistan	200.663	23.228	
Philippines	105.341	28.627	
Thailand	68.416	30.486	
Turkey	81.086	44.771	
Vietnam	96.357	29.043	



Smartphone use

Question 2/3

You can sort the data in the spreadsheet by selecting the sort button in the column header. The data will be sorted in ascending order.





Use the sort buttons help you evaluate each statement.

Click on either **True** or **False** for each of the following statements.

Statement	True	False
The country with the largest population also has the largest number of smartphone users.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
The country with the fewest number of smartphone users also has the smallest population.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
The country with the highest proportion of smartphone users also has the smallest population.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
The country with the median proportion of smartphone users is also the country with the median number of smartphone users.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

SMARTPHONE USE

The data for the proportion of smartphone users (expressed as a percentage) has been added to the spreadsheet in Column D.

Column A 	Column B 	Column C 	Column D 
Country	Population (in millions)	Number of smartphone users (in millions)	Proportion of smartphone users
Bangladesh	166.735	8.921	5%
Indonesia	266.357	67.57	25%
Japan	125.738	65.282	52%
Malaysia	31.571	20.98	38%
Pakistan	200.663	23.228	12%
Philippines	105.341	28.627	27%
Thailand	68.416	30.486	45%
Turkey	81.086	44.771	55%
Vietnam	96.357	29.043	30%



Smartphone use

Question 3/3

You can change the horizontal axis variable between the **Population (in millions)** and the **Minimum hourly wage (in Zeds)** for each country by selecting the corresponding tab.

By selecting the corresponding tabs study the different graphs and answer the question.

For which variable (population or minimum hourly wage) does the proportion of smartphone users in a country increase as the variable value increases?

- Population
- Minimum hourly wage (Zeds)

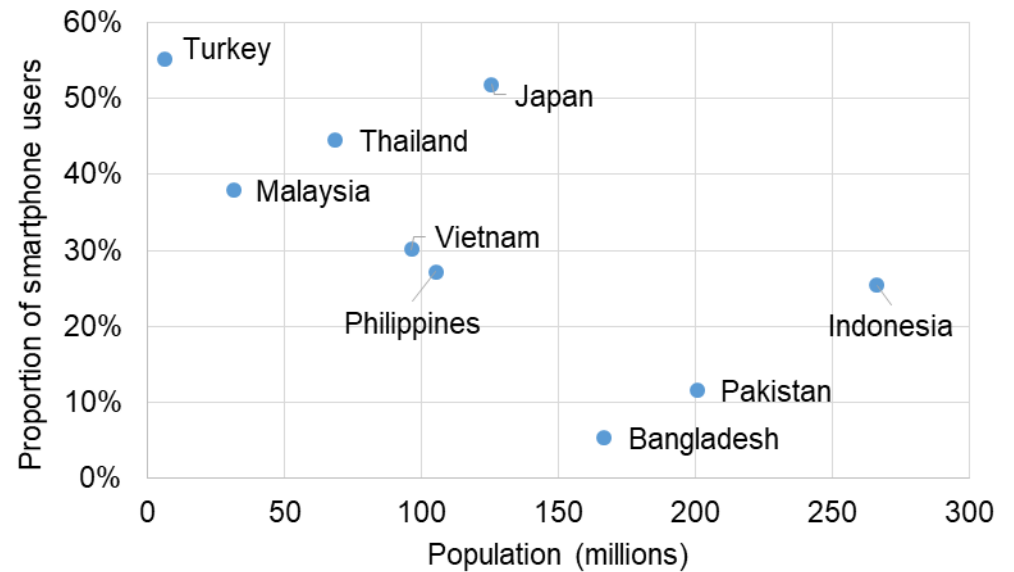
Explain your reasoning:

SMARTPHONE USE

The graph plots the proportion of smartphone users per country in terms of either the **Population (in millions)** and the **Minimum hourly wage (in Zeds)** for each country.

Population

Hourly wage





Smartphone use

Question 3/3

You can change the horizontal axis variable between the **Population (in millions)** and the **Minimum hourly wage (in Zeds)** for each country by selecting the corresponding tab.

By selecting the corresponding tabs study the different graphs and answer the question.

For which variable (population or minimum hourly wage) does the proportion of smartphone users in a country increase as the variable value increases?

- Population
- Minimum hourly wage (Zeds)

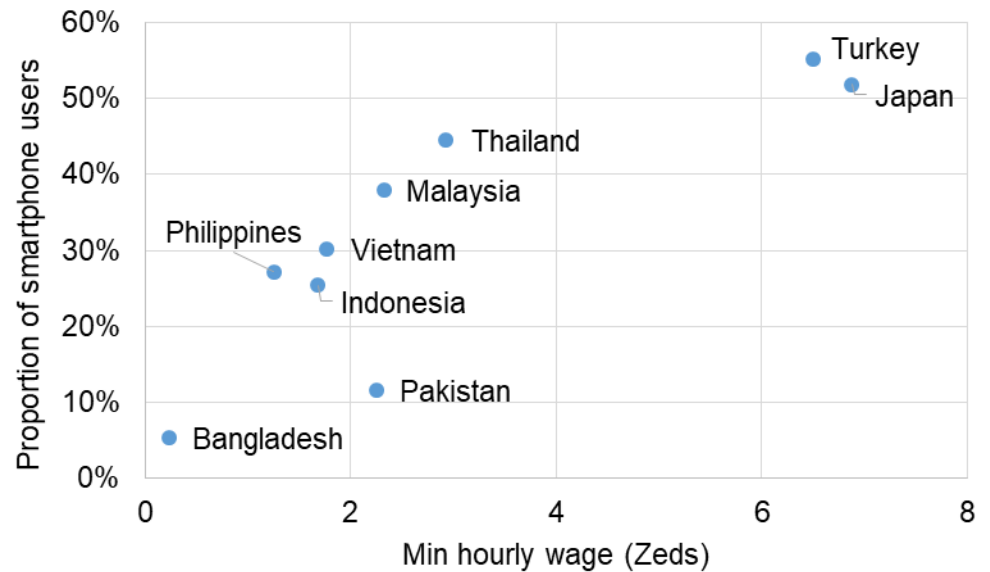
Explain your reasoning:

SMARTPHONE USE

The graph plots the proportion of smartphone users per country in terms of either the **Population (in millions)** and the **Minimum hourly wage (in Zeds)** for each country.

Population

Hourly wage



LA BELLESA DE LES POTÈCIES



The beauty of powers

Introduction

Read the introduction. Then click on the NEXT arrow.

THE BEAUTY OF POWERS

When you perform repeated multiplication with the same number, you can use power notation to summarise what you are doing.

For example:

$$8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4 \quad (\text{four 8s multiplied together})$$

and

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^6 \quad (\text{six 7s multiplied together})$$



The beauty of powers

Question 1/3

Refer to "The beauty of powers" on the right. Click on either **True** or **False** for each of the statements.

Statement	True	False
The number g^{16} is 8 times larger than the number g^{15}		
The number g^{10} is 10 times larger than the number 8		

THE BEAUTY OF POWERS

When you perform repeated multiplication with the same number, you can use power notation to summarise what you are doing.

For example:

$$8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4 \quad (\text{four 8s multiplied together})$$

and

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^6 \quad (\text{six 7s multiplied together})$$

**The beauty of powers**

Question 2/3

Refer to “The beauty of powers” on the right. Click on a choice to answer the question.

$$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43}$$

What is the value of the expression above?

- 1
- 1
- 0
- 5

THE BEAUTY OF POWERS

When you perform repeated multiplication with the same number, you can use power notation to summarise what you are doing.

For example:

$$8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4 \quad (\text{four 8s multiplied together})$$

and

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^6 \quad (\text{six 7s multiplied together})$$

**The beauty of powers**

Question 3/3

Refer to "The beauty of powers" on the right. Click on a choice to answer the question.

What is the last digit of the number 7^{190} ?

- 1
- 3
- 7
- 9

THE BEAUTY OF POWERS

The first nine powers of the number 7 are listed below.

Notice how fast they grow!

The last digits of these numbers follow a rule or pattern. Study the pattern to answer the question.

$$\begin{aligned}7^1 &= 7 \\7^2 &= 49 \\7^3 &= 343 \\7^4 &= 2\,401 \\7^5 &= 16\,807 \\7^6 &= 117\,649 \\7^7 &= 823\,543 \\7^8 &= 5\,764\,801 \\7^9 &= 40\,353\,607\end{aligned}$$

SEMPRE A VEGADES MAI

**Always sometimes never**

Introduction

Read the introduction. Then click on the NEXT arrow.

ALWAYS SOMETIMES NEVER

Statements that people make can generally be grouped into three different categories:

Statements that are **ALWAYS** true;
Statements that are **SOMETIMES** true; and
Statements that are **NEVER** true.

The statement:

"A number that is divisible by 4 is also divisible by 2"

is **ALWAYS** true because 2 is a factor of 4.

The statement:

"A number that is divisible by 9 is also divisible by 6"

is **SOMETIMES** true. For example, 36 is divisible by 9 and by 6, but 27 is divisible by 9, but not divisible by 6.

The statement:

"The sum of two odd numbers is odd"

is **NEVER** true because the sum of two odd numbers is always even.



Always sometimes never

Question 1/3

For each statement, indicate if it is **always true**, **sometimes true** or **never true**

Statement	Always True	Sometimes True	Never True
A 14-year old girl was at least once in her life half her current height.			
A 14-year old girl is taller than a 10-year old girl.			

ALWAYS SOMETIMES NEVER

Statements that people make can generally be grouped into three different categories:

- Statements that are **ALWAYS** true;
- Statements that are **SOMETIMES** true; and
- Statements that are **NEVER** true.

The statement:

"A number that is divisible by 4 is also divisible by 2"

is **ALWAYS** true because 2 is a factor of 4.

The statement:

"A number that is divisible by 9 is also divisible by 6"

is **SOMETIMES** true. For example, 36 is divisible by 9 and by 6, but 27 is divisible by 9, but not divisible by 6.

The statement:

"The sum of two odd numbers is odd"

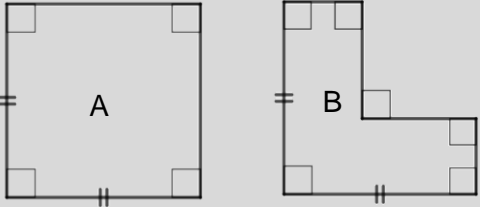
is **NEVER** true because the sum of two odd numbers is always even.



Always sometimes never

Question 2/3

For each statement, indicate if it is **always true**, **sometimes true** or **never true**

Statement	Always True	Sometimes True	Never True	
When a whole number is multiplied by itself the answer is even.				
Doubling a whole number produces an even number.				
Halving an odd whole number produces a whole number				
$3x + 1 = \frac{6x + 2}{2}$				
	The perimeter of figure A is greater than the perimeter of figure B.			
If a coin is flipped 50 times it will land heads up 25 times.				

**Always sometimes never**

Question 3/3

Each of the following statement is **SOMETIMES TRUE**.

For each statement provide an example of when the statement is true and when the statement is not true.

Statement	Example of when the statement is true	Example of when the statement is not true
The person with the largest number of coins has the largest amount of money.	<i>Enter your example here</i>	<i>Enter your example here</i>
$A - B = B - A$	<i>Enter your example here</i>	<i>Enter your example here</i>
If you add the same number to the numerator (top) and the denominator (bottom) of a fraction, the fraction value increases.	<i>Enter your example here</i>	<i>Enter your example here</i>

|

ENREJOLAT



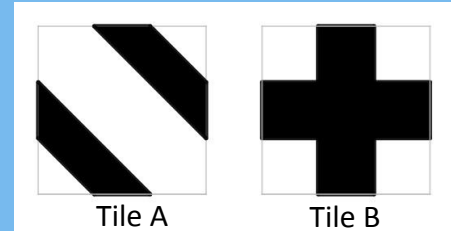
Tiling

Introduction

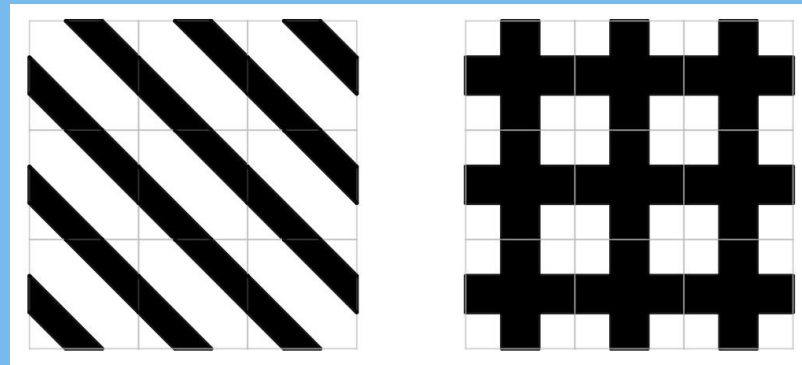
Read the introduction. Then click on the NEXT arrow

TILING

A tiler is tiling the floor. He has two different tiles that he can use, tile A and tile B.



Using only tile A he makes the left hand pattern below and using only tile B he makes the right hand pattern below.





Tiling

Question 1/5

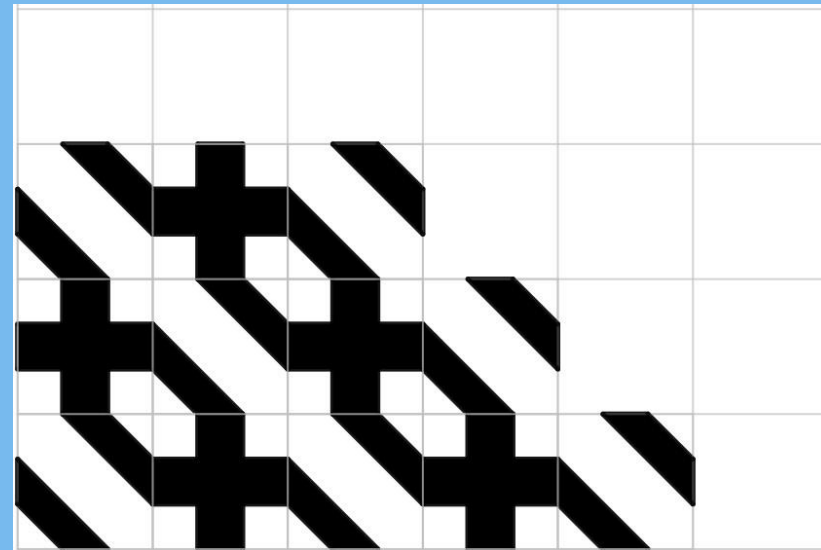
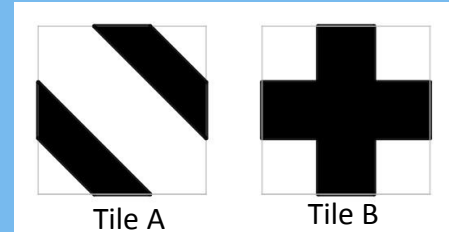
Refer to "tiling" on the right. Use drag-and-drop to complete the problem.

The tiling pattern on the right is created using a combination of the two tiles. The tiler continues to tile the floor by extending the pattern in the same way.

Study the pattern.

Use your mouse to drag and drop the tiles into position and finish tiling the rest of the floor using the same pattern.

TILING





Tiling

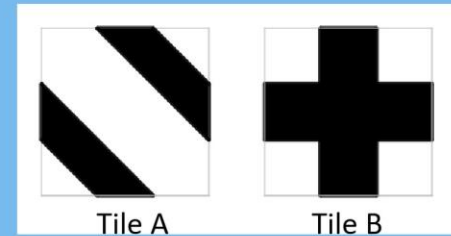
Question 2/5

Refer to "tiling" on the right. Use drag-and-drop to complete the problem.

The tiler wants to make a set of instructions that he can give to people who want to make the same tiling pattern.

Drag and drop the elements into the spaces to complete the instructions that will produce the pattern on the right.

TILING



IF THEN ELSE TILE A TILE B

TILING INSTRUCTIONS

For row = 1 to 4

"First determine the left hand tile in the row"

IF the row is an odd numbered row

THEN the first tile is

ELSE the first tile is

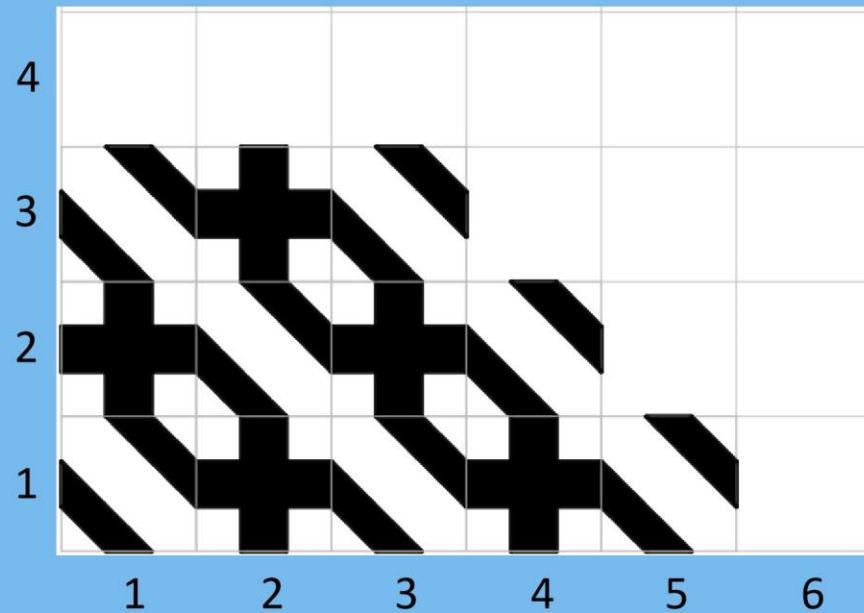
"Complete the row by adding tiles"

IF the previous tile is

use

use

Next row





Tiling

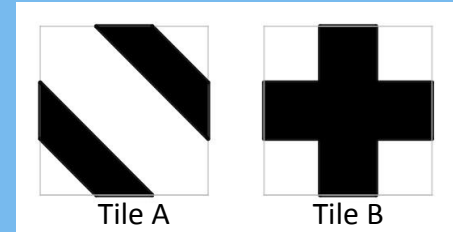
Question 3/5

Refer to "tiling" on the right. Click on the choices to answer the question.

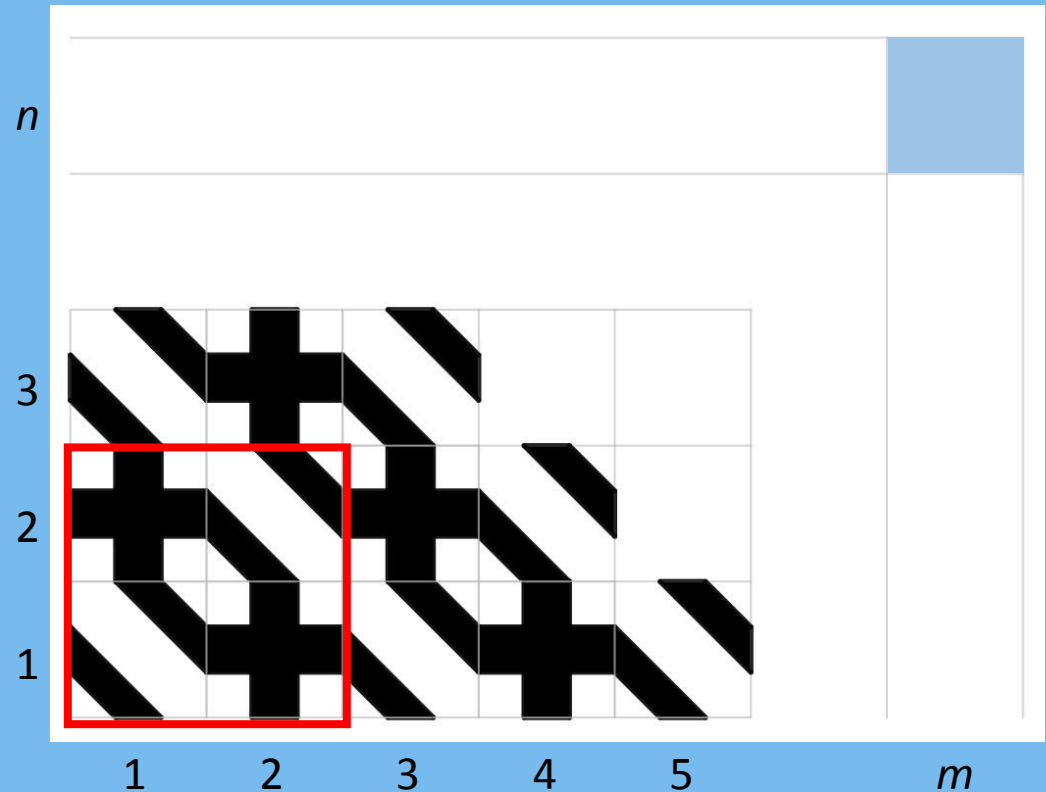
The tiler wants to be able to predict what tile will go in any position on the grid. For example, he wants to know what tile he will use in the marked position $(m; n)$.

Study the tiling pattern and in particular the four tiles highlighted with a red border. Select **ALL** of the rules below that will correctly predict the tile that is needed for any grid position $(m; n)$.

TILING



Rule	
If $m + n$ is odd use tile A, otherwise use tile B	<input type="checkbox"/>
If $m + n$ is even use tile A, otherwise use tile B	<input type="checkbox"/>
If $m \times n$ is odd use tile A, otherwise use tile B	<input type="checkbox"/>
If $m \times n$ is even use tile A, otherwise use tile B	<input type="checkbox"/>
If m is odd and n is odd use tile A, otherwise use tile B	<input type="checkbox"/>
If m and n are both odd or both even use tile A, otherwise use tile B	<input type="checkbox"/>





Tiling

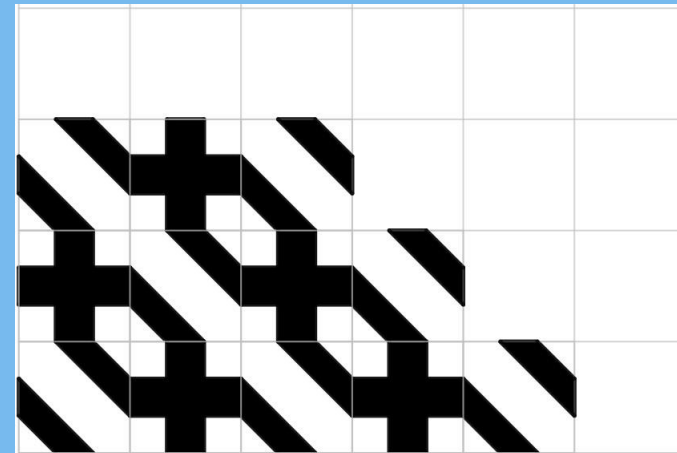
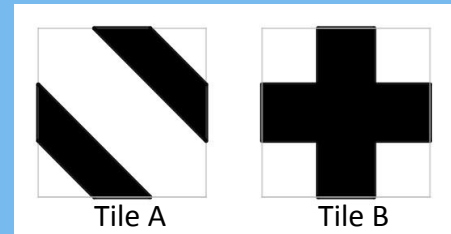
Discussion

Read the introduction

Another way of describing the pattern is to simply write the letters for each tile in the corresponding grid position.

Study the use of letters to record the tiling pattern. Then click on the NEXT arrow.

TILING



A	B	A			
B	A	B	A		
A	B	A	B	A	



Tiling

Question 4/5

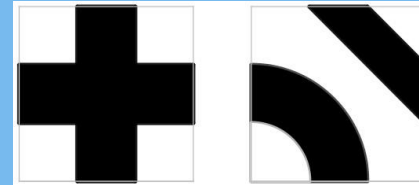
The tiling pattern on the right is created using a combination of two tiles: B and C. Ameer continues to tile the floor by extending the pattern in the same way.

Study the pattern.

The red square on the grid below corresponds to the red square on the grid on the right. Use the letters B and C to record the tile that goes in each position of the red square.

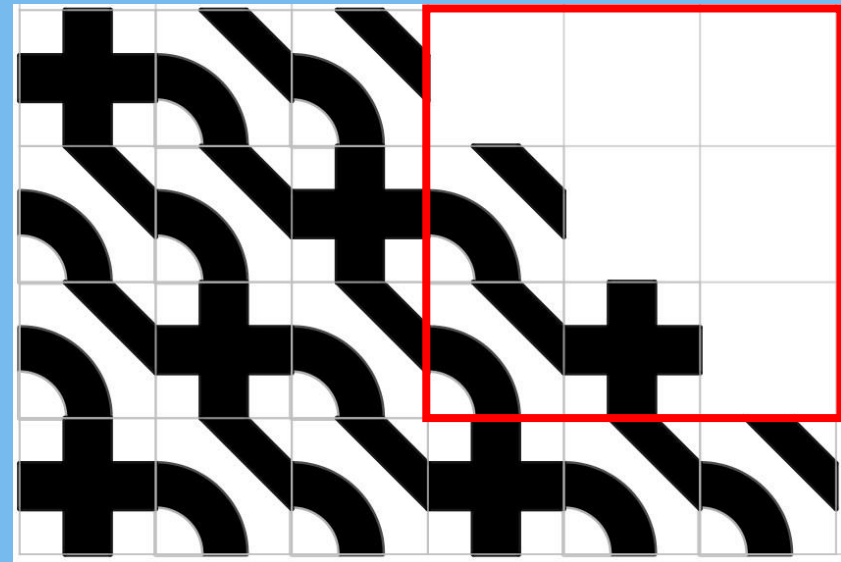
			—	—	—
			—	—	—
			C	—	—

TILING



Tile B

Tile C





Tiling

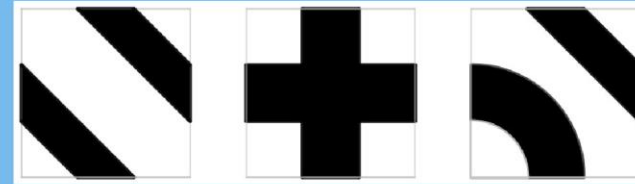
Question 5/5

The tiling pattern on the right is a section from the middle of a much larger area created using a combination of three tiles: A, B and C.

Study the pattern.

Which of the codes below describes a 3 x 3 unit of tiles that can be repeated to create the pattern on the right (select **ALL** that apply).

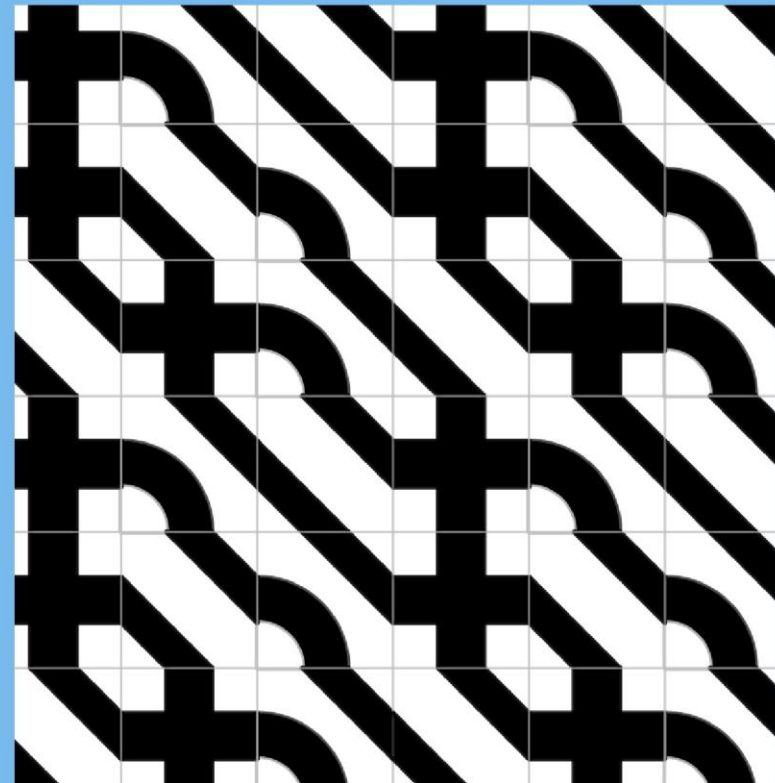
TILING



Tile A

Tile B

Tile C



3 x 3 unit used to create the pattern											
<table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>B</td><td>A</td><td>C</td></tr> <tr><td>B</td><td>C</td><td>A</td></tr> </table>	A	B	C	B	A	C	B	C	A		<input type="radio"/>
A	B	C									
B	A	C									
B	C	A									
<table border="1"> <tr><td>B</td><td>C</td><td>A</td></tr> <tr><td>C</td><td>A</td><td>B</td></tr> <tr><td>A</td><td>C</td><td>B</td></tr> </table>	B	C	A	C	A	B	A	C	B		<input type="radio"/>
B	C	A									
C	A	B									
A	C	B									
<table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>B</td><td>C</td><td>A</td></tr> <tr><td>B</td><td>A</td><td>C</td></tr> </table>	A	B	C	B	C	A	B	A	C		<input type="radio"/>
A	B	C									
B	C	A									
B	A	C									
<table border="1"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>B</td><td>C</td><td>A</td></tr> <tr><td>C</td><td>A</td><td>B</td></tr> </table>	A	B	C	B	C	A	C	A	B		<input type="radio"/>
A	B	C									
B	C	A									
C	A	B									

DECISIÓ DE COMPRA



Purchasing decision

Introduction

Read the introduction. Then click on the NEXT arrow.

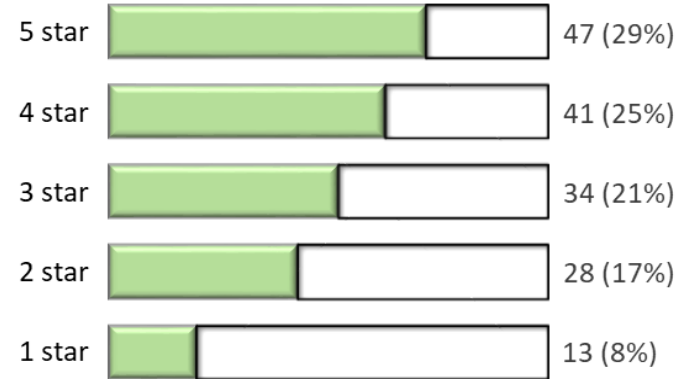
PURCHASING DECISION

Andrea is shopping online for a new pair of headphones. She has identified a pair that she likes. However, she notices that even though the total number of reviews is small, the product received many poor reviews: a total of 25% 1- and 2-star reviews.

Stereo Headphone Earbuds and Microphone



Average rating
Based on 163 ratings





Purchasing decision

Introduction continued

Read the extended introduction. Then click on the NEXT arrow.

PURCHASING DECISION

To help with her decision to buy the product or not, Andrea studied the comments for the 1- and 2-star reviews and noticed that some of the reviews have nothing to do with the quality or the functioning of the product.

She grouped the responses for the 1- and 2-star reviews and summarised her findings in the table.

REASON	Number
Headphones arrived late	13
Headphones did not arrive at all	4
Cable was damaged or missing	7
One or both earbuds were broken	4
Packaging was unattractive	5
Wrong rating (good review, bad rating)	8





Purchasing decision

Question 1/2

Andrea looked through all the reviewers comments and noticed that only the 1- and 2-star reviewers made comments about poor quality or about the product arriving late or not at all.

Use the information from the **Online reviews** tab and from the **Summary table** tab as well as the built in calculator to answer the questions.

Question	Response
What percentage of all of the reviews deal with poor quality of the product?	<input type="text"/>
What percentage of the 1- and 2-star reviews deal with the product arriving late or not at all?	<input type="text"/>

PURCHASING DECISION

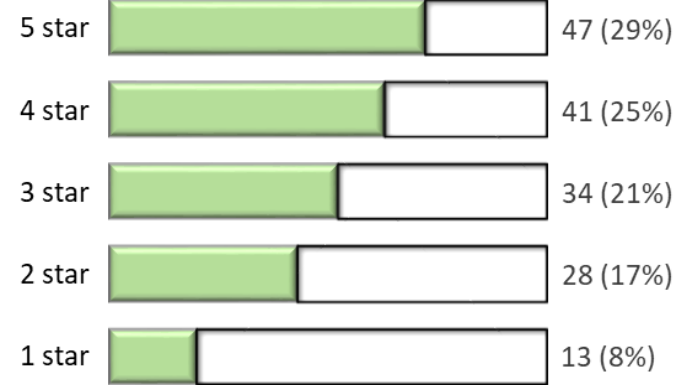
Online reviews

Summary table

Stereo Headphone Earbuds and Microphone



Average rating
Based on 163 ratings





Purchasing decision

Question 1/2

Andrea looked through all the reviewers comments and noticed that only the 1- and 2-star reviewers made comments about poor quality or about the product arriving late or not at all.

Use the information from the **Online reviews** tab and from the **Summary table** tab as well as the built in calculator to answer the questions.

Question	Response
What percentage of all of the reviews deal with poor quality of the product?	<input type="text"/>
What percentage of the 1- and 2-star reviews deal with the product arriving late or not at all?	<input type="text"/>

PURCHASING DECISION

Online reviews

Summary table

REASON	Number
Headphones arrived late	13
Headphones did not arrive at all	4
Cable was damaged or missing	7
One or both earbuds were broken	4
Packaging was unattractive	5
Wrong rating (good review, bad rating)	8





Purchasing decision

Question 2/2

Andrea looked through all the reviewers comments and noticed that only the 1- and 2-star reviewers made comments about poor quality or about the product arriving late or not at all.

Use the information from the **Online reviews** tab and from the **Summary table** tab as well as the built in calculator to answer the question.

Question	Response
<p>Andrea is concerned about the headphones arriving late or not at all.</p> <p>Based on the information in the Online reviews tab and the Summary table. How likely is it that the product will arrive late or not at all?</p> <p>Express your answer as a fraction or percentage.</p>	

PURCHASING DECISION

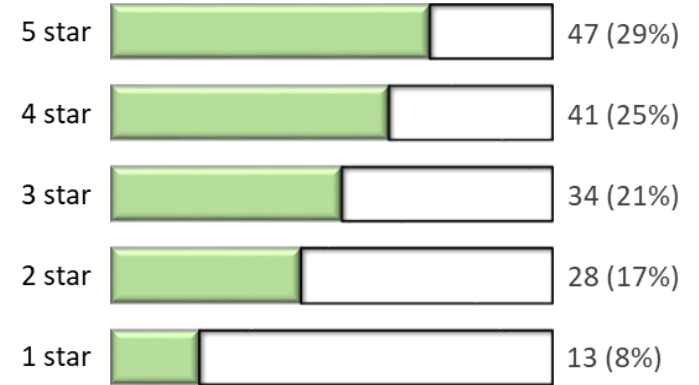
Online reviews

Summary table

Stereo Headphone Earbuds and Microphone



Average rating
Based on 163 ratings





Purchasing decision

Question 2/2

Andrea looked through all the reviewers comments and noticed that only the 1- and 2-star reviewers made comments about poor quality or about the product arriving late or not at all.

Use the information from the **Online reviews** tab and from the **Summary table** tab as well as the built in calculator to answer the question.

Question	Response
<p>Andrea is concerned about the headphones arriving late or not at all.</p> <p>Based on the information in the Online reviews tab and the Summary table. How likely is it that the product will arrive late or not at all?</p> <p>Express your answer as a fraction or percentage.</p>	

PURCHASING DECISION

Online reviews

Summary table

REASON	Number
Headphones arrived late	13
Headphones did not arrive at all	4
Cable was damaged or missing	7
One or both earbuds were broken	4
Packaging was unattractive	5
Wrong rating (good review, bad rating)	8



|

NAVEGACIÓ



Navigation

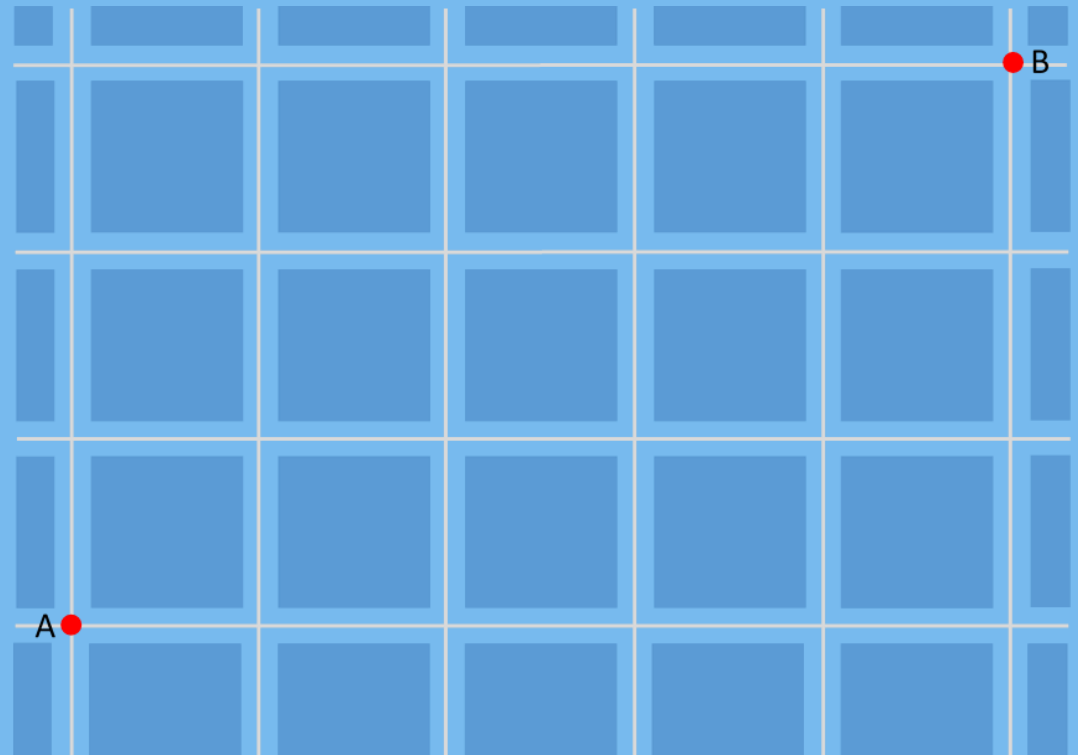
Introduction

Read the introduction. Then click on the NEXT arrow.

NAVIGATION

The shortest distance between two points is a straight line. It is, however not usually possible to navigate along a straight line in a town. Look at the map below. The grey lines are the roads and the square blue blocks are the buildings.

In this unit you will explore different strategies for planning a route from one point to another in this town.





Navigation

Introduction continued

Read the introduction and select the different tabs to see the different routes. Then click on the NEXT arrow.

NAVIGATION

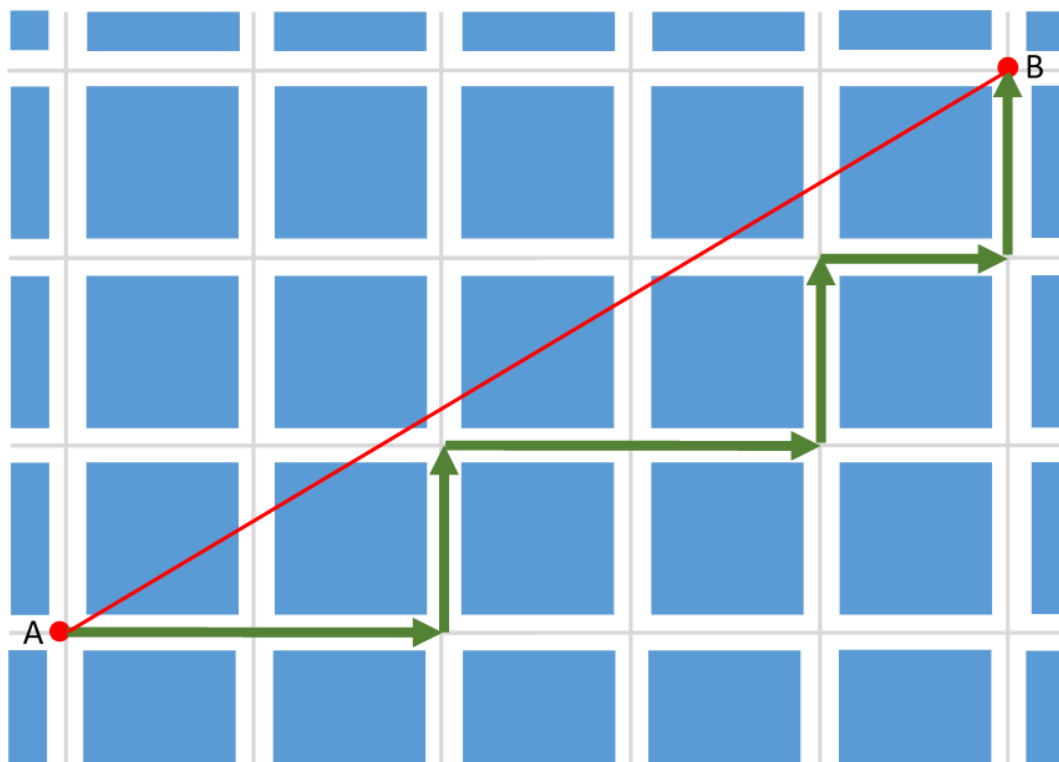
Ann, Bob and Corey have different ideas about how to determine the shortest route from A to B.

- Ann always moves right or up and stays below but as close as possible to the straight red line joining A and B (green line).
- Bob always moves right or up and tries to cross the straight red line joining A and B as often as possible (orange line).
- Corey always moves right or up and stays above but as close as possible to the straight red line joining A and B (purple line).

Ann's route

Bob's route

Corey's route





Navigation

Introduction continued

Read the introduction and select the different tabs to see the different routes. Then click on the NEXT arrow.

NAVIGATION

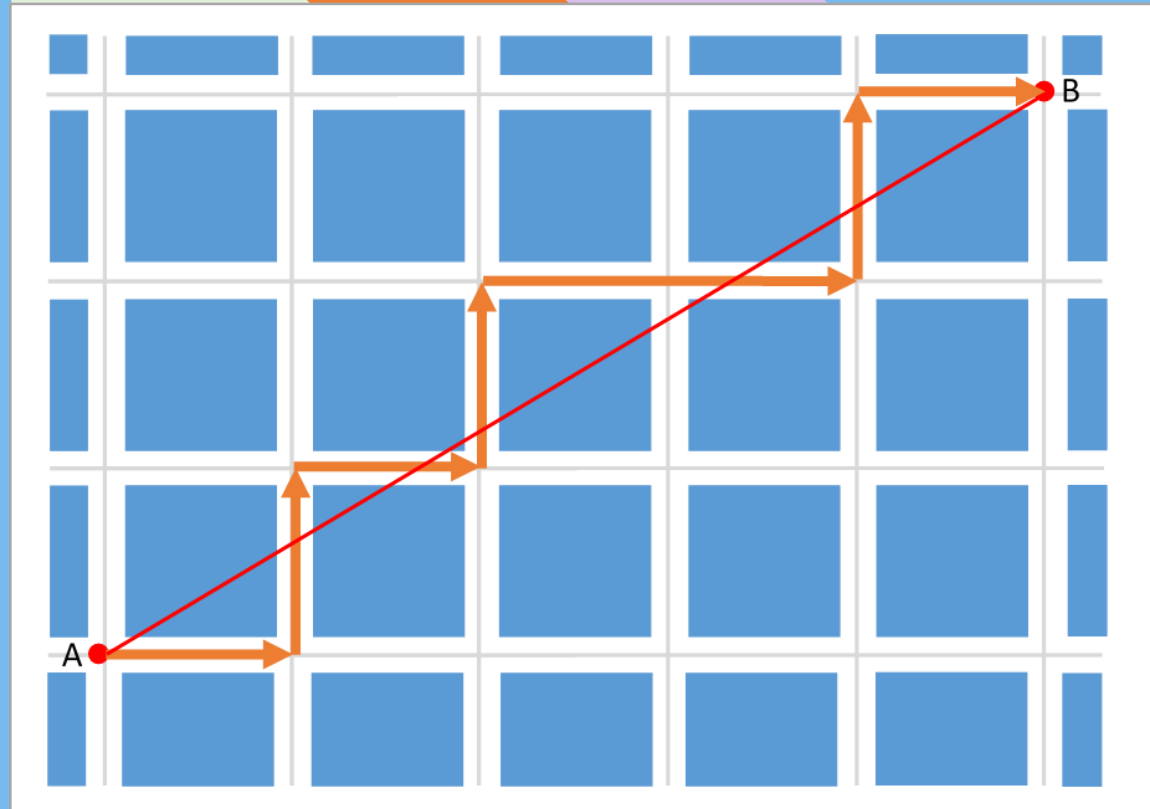
Ann, Bob and Corey have different ideas about how to determine the shortest route from A to B.

- Ann always moves right or up and stays below but as close as possible to the straight red line joining A and B (green line).
- Bob always moves right or up and tries to cross the straight red line joining A and B as often as possible (orange line).
- Corey always moves right or up and stays above but as close as possible to the straight red line joining A and B (purple line).

Ann's route

Bob's route

Corey's route





Navigation

Introduction continued

Read the introduction and select the different tabs to see the different routes. Then click on the NEXT arrow.

NAVIGATION

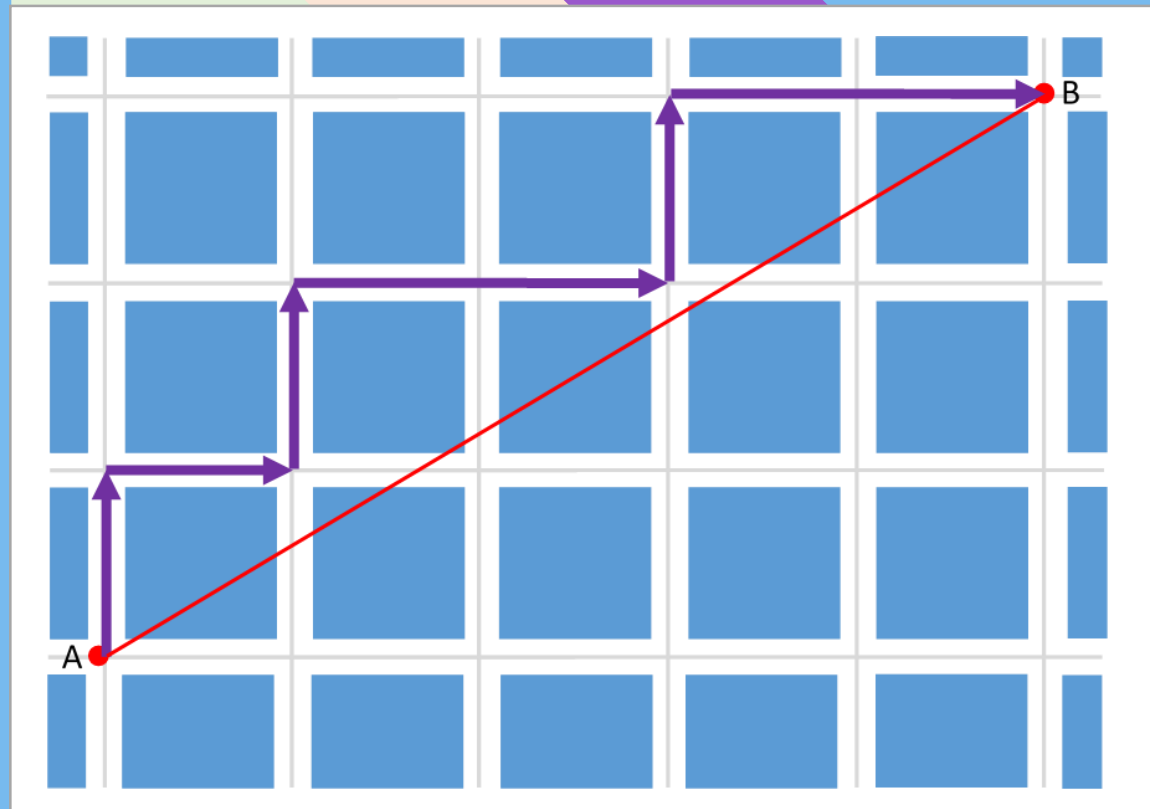
Ann, Bob and Corey have different ideas about how to determine the shortest route from A to B.

- Ann always moves right or up and stays below but as close as possible to the straight red line joining A and B (green line).
- Bob always moves right or up and tries to cross the straight red line joining A and B as often as possible (orange line).
- Corey always moves right or up and stays above but as close as possible to the straight red line joining A and B (purple line).

Ann's route

Bob's route

Corey's route





Navigation

Question 1/2

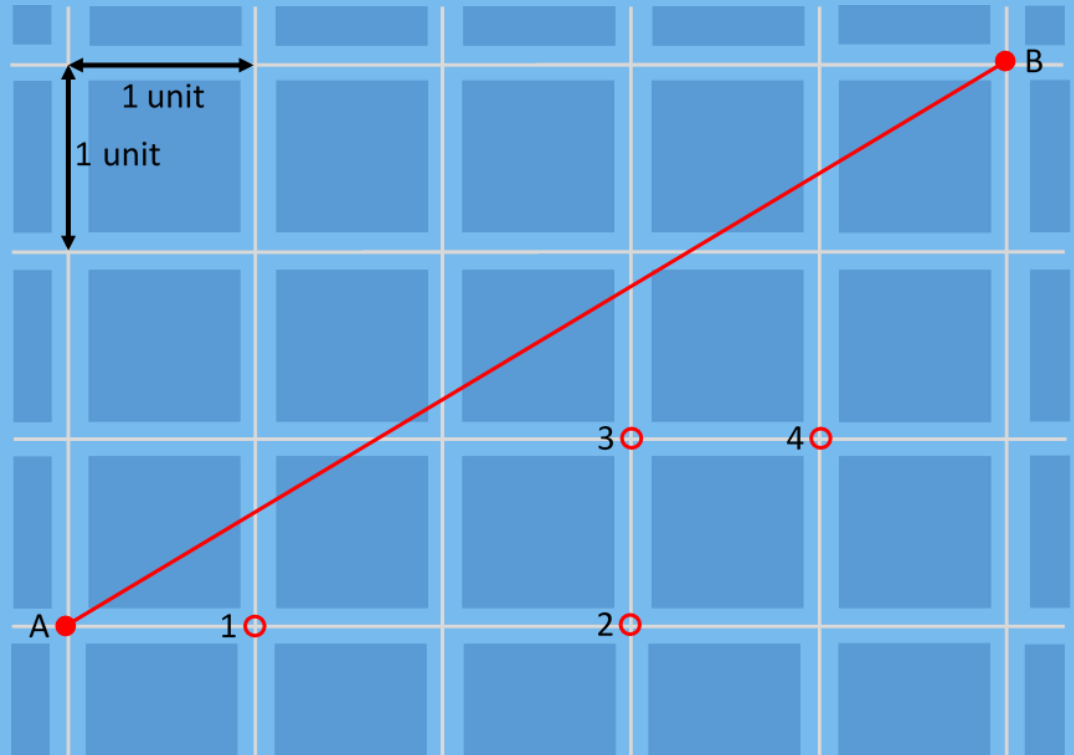
Use your mouse to move point A onto the different marked intersections of the roads – for each position of A, the route for each strategy for getting to B is shown and the distance recorded in the table.

You will notice that the irrespective of the starting position, Ann’s route, Bob’s route and Corey’s route are all the same length for each route from A to B.

Explain why all three strategies produce routes that are equal in length.

Provide an explanation

NAVIGATION



Position of A	Distance from A to B (in units)		
	Ann’s route	Bob’s route	Corey’s route
1			
2			
3			
4			



Navigation

Question 2/2

Three diagonal streets have been added to the map.

We know from the earlier work that without the diagonal streets the shortest route from point C to point B will be 7 units long.

Click on either **True** or **False** for each of the statements and provide a reason for your answer.

1. There exists a route from C to B that includes Diagonal 1 and is shorter than 7 units.

- True
 False

Provide a reason for your answer

2. There exists a route from C to B that includes Diagonal 2 and is shorter than 7 units.

- True
 False

Provide a reason for your answer

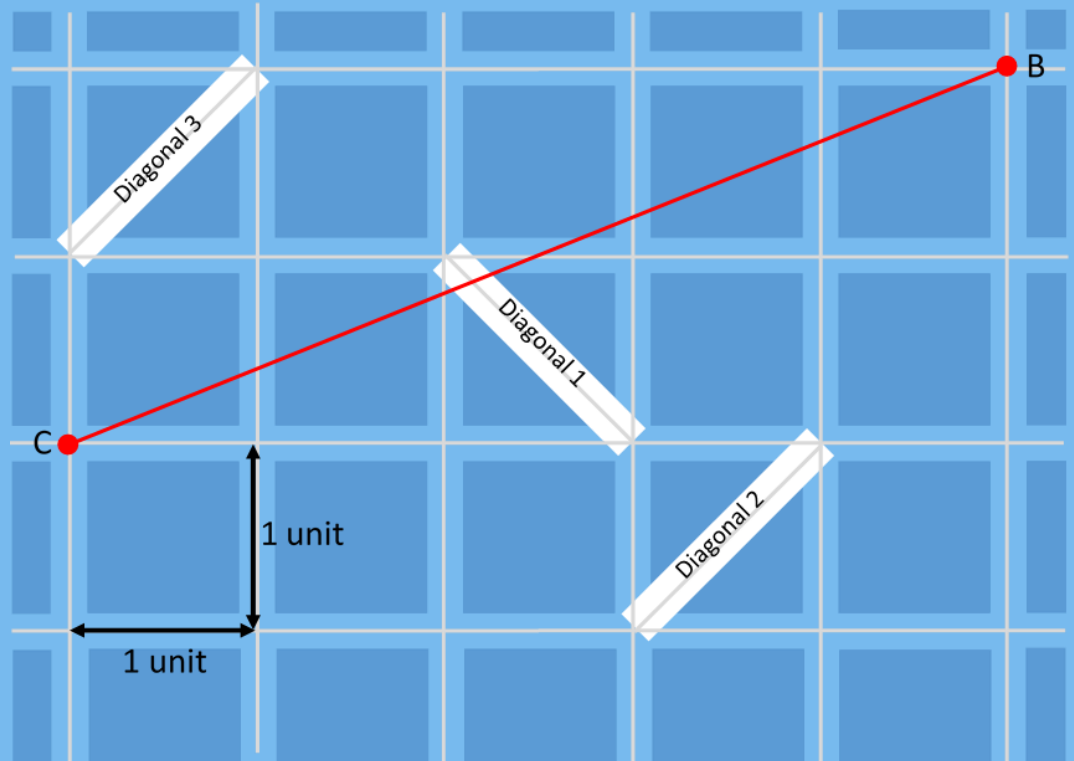
3. There exists a route from C to B that includes Diagonal 3 and is shorter than 7 units.

- True
 False

Provide a reason for your answer

NAVIGATION

Three diagonal streets have been added to the map.



SIMULACIÓ D'ESTALVIS



Savings simulation

Introduction

Read the introduction. Then click on the NEXT arrow.

SAVINGS SIMULATION

Sizwe and her parents are discussing how best to save money to support her expenses when she starts college. They have identified an online saving simulation application that allows them to explore different ways in which they can achieve the outcome they require.

The simulation considers four variables:

- **Monthly deposit:** the amount of money that the family deposits into the savings account every month;
- **Savings period:** the number of months for which the family makes a monthly deposit into the savings account;
- The **annual interest rate** that the savings account attracts; and
- **Total savings:** the total amount that will be saved at the end of the savings period.

The application allows the user to perform three simulations:

- **Total savings:** the total savings that will accumulate if the monthly deposit, interest rate and savings period are known;
- **Monthly deposit:** the monthly deposit that is needed to achieve a desired total savings over a given time period and interest rate; and
- **Savings period:** the total period (number of months) that is needed to achieve a desired total savings for a given monthly deposit and interest rate.



Savings simulation

Introduction

Using the simulator involves two steps:

1. Selecting the what you want to simulate; and
2. Entering the values of the relevant variables.

The simulator allows you to save the details for up to five simulations at a time.

Explore the way that the simulator works then click on the NEXT arrow.

SAVINGS SIMULATOR

Step 1: Select what you want to simulate:

Step 2: Complete the required information using the highlighted (red) sliders:

Savings period: Months

Monthly deposit: Zeds

Annual interest rate: % per year

Total saving: Zeds

Save the data

Clear the saved data

Simulation #	Savings Period (Months)	Monthly deposit (Zeds)	Annual Interest Rate (%)	Total amount saved (Zeds)
1				
2				
3				
4				
5				



Savings simulation

Introduction

Using the simulator involves two steps:

1. Selecting the what you want to simulate; and
2. Entering the values of the relevant variables.

The simulator allows you to save the details for up to five simulations at a time.

Explore the way that the simulator works then click on the NEXT arrow.

This screen does not appear in the unit. It is provided here to give the reader a sense of what the student will experience.

SAVINGS SIMULATOR

Step 1: Select what you want to simulate:

Step 2: Complete the required information using the highlighted (red) sliders:

Savings period: Months

Monthly deposit: Zeds

Annual interest rate: % per year

Total saving: Zeds

Save the data

Clear the saved data

Simulation #	Savings Period (Months)	Monthly deposit (Zeds)	Annual Interest Rate (%)	Total amount saved (Zeds)
1	12	40	6	495
2	48	40	6	2165
3	12	40	10	505
4	48	40	10	2350
5				



Savings simulation

Introduction

Using the simulator involves two steps:

1. Selecting the what you want to simulate; and
2. Entering the values of the relevant variables.

The simulator allows you to save the details for up to five simulations at a time.

Explore the way that the simulator works then click on the NEXT arrow.

This screen does not appear in the unit. It is provided here to give the reader a sense of what the student will experience.

SAVINGS SIMULATOR

Step 1: Select what you want to simulate:

Step 2: Complete the required information using the highlighted (red) sliders:

Savings period: 48 Months

Monthly deposit: 82 Zeds

Annual interest rate: 12 % per year

Total saving: 5000 Zeds

Save the data

Clear the saved data

Simulation #	Savings Period (Months)	Monthly deposit (Zeds)	Annual Interest Rate (%)	Total amount saved (Zeds)
1	12	405	6	5000
2	48	92	6	5000
3	18	255	12	5000
4	48	82	12	5000
5				



Savings simulation

Introduction

Using the simulator involves two steps:

1. Selecting the what you want to simulate; and
2. Entering the values of the relevant variables.

The simulator allows you to save the details for up to five simulations at a time.

Explore the way that the simulator works then click on the NEXT arrow.

This screen does not appear in the unit. It is provided here to give the reader a sense of what the student will experience.

SAVINGS SIMULATOR

Step 1: Select what you want to simulate:

Step 2: Complete the required information using the highlighted (red) sliders:

Savings period: Months

Monthly deposit: Zeds

Annual interest rate: % per year

Total saving: Zeds

Save the data

Clear the saved data

Simulation #	Savings Period (Months)	Monthly deposit (Zeds)	Annual Interest Rate (%)	Total amount saved (Zeds)
1	97	40	6	5000
2	55	80	6	5000
3	81	40	12	5000
4	49	80	12	5000
5				



Savings simulation

Question 1/3

Use the simulator to calculate the unknown amount in each situation.

1. How many Zeds will Sizwe save altogether if she:

- Deposits 60 Zeds per month,
- For a period of 48 months,
- At an annual interest rate of 4%.

Enter your answer here

2. How many Zeds must Sizwe deposit every month if she:

- Wants to save 4,000 Zeds,
- Over a period of 36 months,
- At an annual interest rate of 8%.

Enter your answer here

3. How long (in months) will it take Sizwe to:

- Save 6000 Zeds,
- If she deposits 100 Zeds per month,
- At an annual interest rate of 10%.

Enter your answer here

SAVINGS SIMULATOR

Step 1: Select what you want to simulate:

Step 2: Complete the required information using the highlighted (red) sliders:

Savings period: Months

Monthly deposit: Zeds

Annual interest rate: % per year

Total saving: Zeds

Save the data

Clear the saved data

Simulation #	Savings Period (Months)	Monthly deposit (Zeds)	Annual Interest Rate (%)	Total amount saved (Zeds)
1				
2				
3				
4				
5				



Savings simulation

Question 2/3

For each simulation select **TWO STATEMENTS** to justify the use of the given simulator.

Simulation	Statement		
	You know how much money you will need	You know how much money you can save each month	You know when you will need the money
Savings period simulation	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Monthly deposit simulation.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Total savings simulation	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

SAVINGS SIMULATOR

Step 1: Select what you want to simulate:

Step 2: Complete the required information using the highlighted (red) sliders:

Savings period: Months

Monthly deposit: Zeds

Annual interest rate: % per year

Total saving: Zeds

Save the data

Clear the saved data

Simulation #	Savings Period (Months)	Monthly deposit (Zeds)	Annual Interest Rate (%)	Total amount saved (Zeds)
1				
2				
3				
4				
5				



Savings simulation

Question 3/3

Sizwe has done some simulations, She says: ***“I notice than when I earn no interest and double the monthly deposit, the length of the savings period is halved. But, when I earn interest and double the monthly deposit the savings period is not halved.”***

Select the appropriate tabs to study the records in Sizwe’s simulation and to do your own simulations to answer the questions.

1. Complete the statement:

Sizwe’s observation is:

- always true
- sometimes true, it depends on the interest rate

2. Complete the statement:

For a fixed total savings and a set monthly deposit, an increase in the interest rate reduces the length of the savings period more when:

- the monthly payment is smaller.
- the monthly payment is larger.

3. Provide a justification for the statement you completed in question 2.

Provide a justification

Sizwe’s simulator

Blank simulator

SAVINGS SIMULATOR

Step 1: Select what you want to simulate:

Step 2: Complete the required information using the highlighted (red) sliders:

Savings period: Months

Monthly deposit: Zeds

Annual interest rate: % per year

Total saving: Zeds

Save the data

Clear the saved data

Simulation #	Savings Period (Months)	Monthly deposit (Zeds)	Annual Interest Rate (%)	Total amount saved (Zeds)
1	300	20	0	6000
2	150	40	0	6000
3	184	20	6	6000
4	112	40	6	6000
5				



Savings simulation

Question 3/3

Sizwe has done some simulations, She says: ***“I notice than when I earn no interest and double the monthly deposit, the length of the savings period is halved. But, when I earn interest and double the monthly deposit the savings period is not halved.”***

Select the appropriate tabs to study the records in Sizwe’s simulation and to do your own simulations to answer the questions.

1. Complete the statement:

Sizwe’s observation is:

- always true
- sometimes true, it depends on the interest rate

2. Complete the statement:

For a fixed total savings and a set monthly deposit, an increase in the interest rate reduces the length of the savings period more when:

- the monthly payment is smaller.
- the monthly payment is larger.

3. Provide a justification for the statement you completed in question 2.

Provide a justification

Sizwe’s simulator

Blank simulator

SAVINGS SIMULATOR

Step 1: Select what you want to simulate:

Step 2: Complete the required information using the highlighted (red) sliders:

Savings period: Months

Monthly deposit: Zeds

Annual interest rate: % per year

Total saving: Zeds

Save the data

Clear the saved data

Simulation #	Savings Period (Months)	Monthly deposit (Zeds)	Annual Interest Rate (%)	Total amount saved (Zeds)
1				
2				
3				
4				
5				

