

Matemàtiques

Criteris específics d'avaluació

Criteris d'avaluació	Indicadors	Valor
1. Redactar amb correcció i adequació sintàctica, lèxica, ortogràfica i discursiva, i amb riquesa expressiva.	El text s'entén amb certes dificultats i no es preocupa gaire d'escriure bé la simbologia matemàtica.	0,25
	El text és discontinu, amb manca de connectors, tot i que la terminologia matemàtica sigui força adequada.	0,5
	Escriu amb text continu i coherent, fàcilment comprensible, emprant el llenguatge i la simbologia matemàtica però amb alguna errada.	0,75
	Escriu amb text continu i coherent, fàcilment comprensible, emprant el llenguatge i la simbologia matemàtica amb precisió.	1
2. Interpretar la situació plantejada, organitzant la informació donada i comprenent el context i el que se li demana.	Escriu un text que requereix de l'enunciat per entendre'l, perquè no s'entén què fa ni per què ho fa.	0,25
	El text és força independent i es pot intuir què fa però no posa cap introducció que ens situï en el context.	0,5
	El text té context però al llarg de l'explicació es perd la referència.	0,75
	Incorpora una introducció breu però clara en què es veu que ha entès el que se li demana, entén el context, i sap el que ha de fer. Al llarg del text no s'aparta del context i sabem sempre què està fent i per què ho fa.	1
3. Dissenyar representacions matemàtiques que per si soles expressin idees matemàtiques sintetitzades.	Hi ha errors significatius als gràfics o bé són difícilment comprensibles.	0,25
	Els gràfics, tot i ser correctes, no expressen per si soles les idees matemàtiques.	0,5
	Les representacions estan fetes amb poca precisió, tot i que representin les idees matemàtiques per si soles.	0,75
	Les representacions gràfiques són de qualitat i expressen per si soles les idees matemàtiques que representen.	1

Críteris d'avaluació	Indicadors	Valor
4. Generar o identificar models a partir de la situació plantejada en el context, que permetin convertir la situació en reptes o problemes matemàtics.	Intenta resoldre el problema amb estratègies rudimentàries poc formals que, tot i que puguin tenir certa eficàcia, s'allunyen dels models matemàtics adients.	0,25
	Utilitza models matemàtics que no s'adeqüen del tot a la situació, tot i que es desenvolupa amb la simbologia matemàtica corresponent.	0,5
	Utilitza el model matemàtic correcte de manera irreflexiva i/o fa errors de notació matemàtica.	0,75
	Troba i comenta la idoneïtat del model matemàtic a emprar i l'utilitza correctament emprant la simbologia matemàtica amb precisió.	1
5. Identificar vincles entre diferents models i representacions matemàtiques per disposar de més eines a l'hora d'abordar un repte i per extreure informació d'un model i aplicar-la a l'altre.	Aquest criteri només es valorarà amb notable o extraordinari.	0,25
	Aquest criteri només es valorarà amb notable o extraordinari.	0,5
	Mostra relació entre els diferents conceptes matemàtics, tot i que és inconnexa i poc eficient.	0,75
	Identifica els diferents models matemàtics implicats en el context i els relaciona amb coherència i eficàcia. Fa representacions diferents per tal de treure tota la informació que necessita interconnectant les diferents eines matemàtiques.	1
6. Construir i expressar amb coherència científica textos amb arguments matemàtics que permetin fer judicis crítics o prendre decisions tecnològiques, socials, artístiques i culturals en un context sostenible, ètic i respectuós amb el medi ambient, en relació amb la situació o amb el problema plantejat.	La proposta matemàtica és correcta però la desvincula del context.	0,25
	La proposta que fa és poc original però intenta que sigui una bona proposta per al context de la situació, i dona una bona solució a la problemàtica que genera el context.	0,5
	Fa una bona proposta però no es preocupa de donar una resposta real a la situació plantejada.	0,75
	En el text que escriu, no sols es preocupa de resoldre tots els entrebancs matemàtics amb què es troba, sinó que, a més, interioritza i valora el context fent propostes atrevides, originals, ben formulades i justificades per tal de donar una resposta real i coherent a la necessitat que es planteja en el context.	1

Críteris d'avaluació	Indicadors	Valor
7. Obtenir solucions i fer propostes creatives a les situacions plantejades en els contextos.	Busca la solució menys creativa per tal de fer una proposta sense errors amb el mínim esforç.	0,25
	El grau de complexitat és baix.	0,5
	El grau de complexitat és bo però podria ser millor.	0,75
	Es veu un esforç a fer una proposta complexa i molt original. Pot ser que la complexitat sigui tan alta que l'estudiant no acabi d'aconseguir el repte per manca de temps.	1
8. Identificar els errors propis que es fan en matemàtiques, descobrir els elements conceptuals, de procediment o d'estratègia que els provoquen i, finalment, expressar de manera raonada el motiu de l'error.	Hi ha errors que no identifica però les propostes són acceptables.	0,25
	Identifica algun error obvi i l'esmena però els errors substancials no els identifica. Tot i així les propostes són força bones.	0,5
	Fa propostes prèvies, esbossos, esquemes, etc., que potser tenen algun inconvenient (per exemple, una funció amb un extrem massa alt), que deixa a mitges i fa una nova proposta.	0,75
	Fa propostes prèvies, esbossos, esquemes, etc., que potser tenen algun inconvenient (per exemple, una funció amb un extrem massa alt), comenta per què no funciona bé i fa una nova proposta.	1

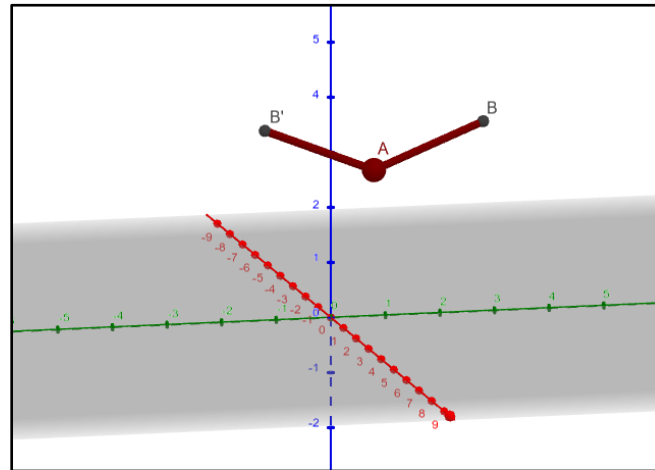
La suma dels punts totals és 8, per tant caldrà dividir la qualificació final per 0,8 per tal d'ajustar-la al màxim estàndard de 10 punts.

Criteris específics d'avaluació complementaris. Exemple de resolució

Aquesta proposta de resolució és un esquema de solució que no s'ha elaborat en format informe amb text continu, tal com es demana a la prova.

Construcció de l'ocell

Els ocells es poden generar de manera molt bàsica amb tres punts. El punt A representa el cos de l'ocell; els punts B i B' , els extrems de les ales; i els segments AB i AB' , les ales dels ocells. Per simplificar la realització del disseny es parla tota l'estona del punt A , el que representa el cos de l'ocell.



Moviment de l'ocell

L'ocell es mou desplaçant el punt A (el cos de l'ocell).

Considerem que l'escenari on volen els ocells és una caixa o habitacle limitat per vuit vèrtexs de coordenades: $(10, 10, 0)$, $(10, -10, 0)$, $(-10, 10, 0)$, $(-10, -10, 0)$, $(10, 10, 10)$, $(10, -10, 10)$, $(-10, 10, 10)$ i $(-10, -10, 10)$.

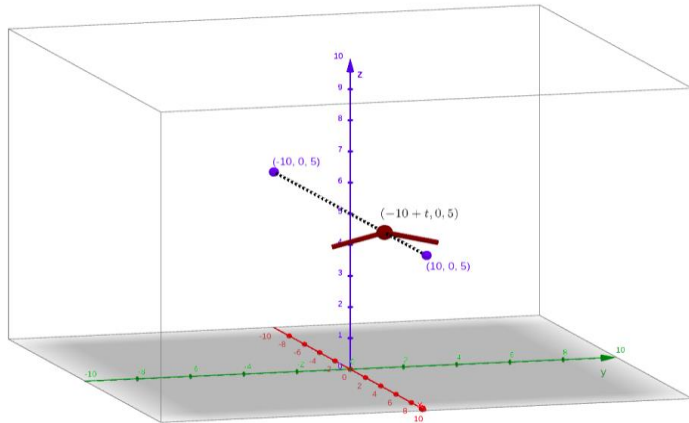
Volem omplir aquest espai amb ocells en moviment. **Serà un requisit imprescindible que tots els ocells entrin i surtin per una paret d'aquesta caixa i mai pel sostre. Evidentment no poden anar per sota ni per sobre.**

EXEMPLE 1

Es pot definir el moviment d'un ocell en un punt genèric del segment $A = (x, y, z) = (0, 0, 5) + t(1, 0, 0) = (t, 0, 5)$ amb $t \in [-10, 10]$ la qual cosa genera un ocell que travessa la caixa volant en una línia recta des del punt $(-10, 0, 5)$, fins el $(10, 0, 5)$ a mesura que el paràmetre prengui valors des de -10 fins a 10 .

Activitats de moviment de l'exemple 1

1. Comenteu, raonadament, què passa si prenem el vector director del moviment en sentit contrari $\underline{v} = -(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$

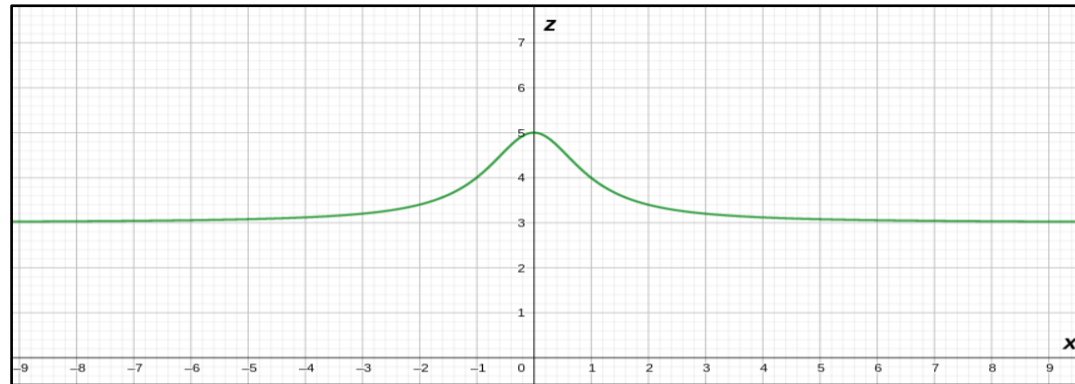


Resposta:

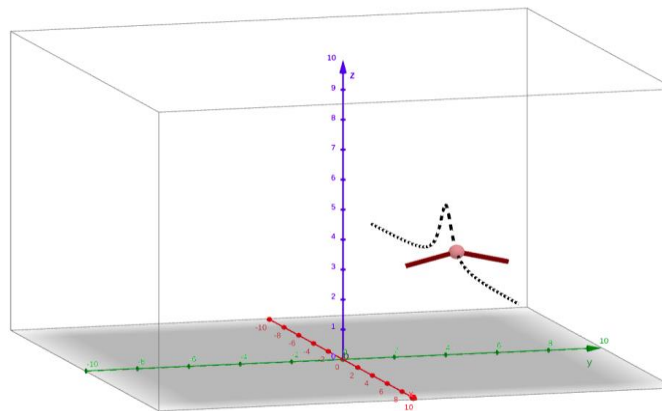
Aquest és un cas curiós en què el vector director de les rectes (segments) tenen sentit, ja que en variar de manera creixent el paràmetre k , l'ocell es mourà en un sentit o un altre dependent del vector director.

EXEMPLE 2

També podem definir ocells que volen en línia corba en un pla paral·lel al pla XZ, per exemple, podem utilitzar la funció $z = \frac{2}{x^2+1} + 3$.



En aquest cas, caldria parametritzar la funció posant-la en tres coordenades i deixant un valor constant per a la coordenada y , per exemple el valor $y = 4$; d'aquesta manera l'equació paramètrica prenent $x = t$ seria: $(t, 4, \frac{2}{t^2+1} + 3)$ amb $-10 < t < 10$; així, a mesura que varia la t des de -10 fins a 10 , l'ocell es va movent de manera homogènia respecte a l'eix x (darrere-davant) i puja i baixa respecte a l'altura z sense variar respecte a $y = 4$.



Activitat de moviment de l'exemple 2

2. Trobeu els punts d'entrada i de sortida de la caixa del punt (l'ocell) que es desplaça segons l'equació indicada en l'exemple 2 i l'extrem relatiu dins la caixa 3D.

Resposta:

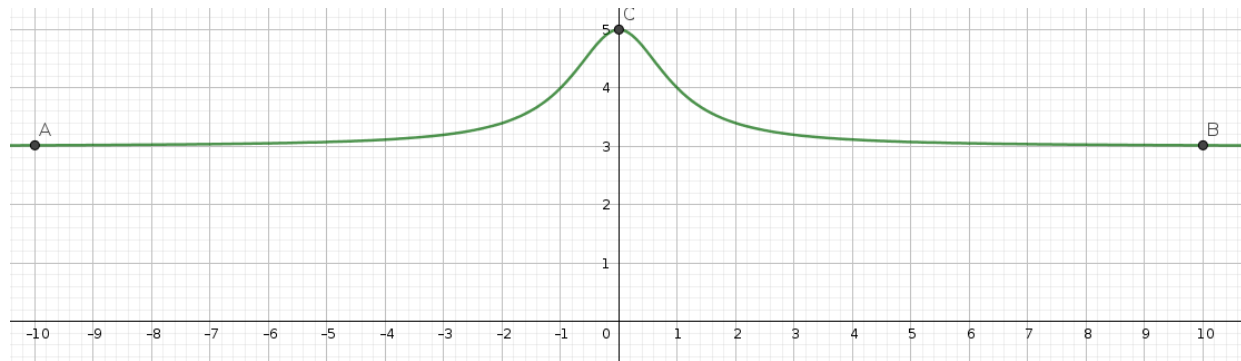
Aquest és un apartat molt interessant, ja que entrem de ple en la capacitat de relacionar conceptes (criteri 5). En aquest cas, resultaria més fàcil trobar els valors primer en el pla i després posar-los en la caixa 3D.

Per als punts d'entrada i sortida sols cal substituir t pels valors -10 i 10 al punt genèric:

$$\left(-10, 4, \frac{2}{10^2+1} + 3\right) = \left(-10, 4, \frac{305}{101}\right) \text{ i } \left(10, 4, \frac{2}{10^2+1} + 3\right) = \left(10, 4, \frac{305}{101}\right)$$

Pel que fa al màxim caldria derivar $z(t) = \frac{2}{t^2+1} + 3$, aleshores $z'(t) = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}$, que s'anul·la per a $t = 0$; el màxim es troba, doncs, en $t(0) = 2 + 3 = 5$.

Així doncs, l'ocell arriba al punt més alt quan $t = 0$ i aquest punt serà el punt $(0, 4, 5)$.



Activitats de construcció del moviment dels ocells

De moment ja heu experimentat, en l'exemple 1, amb el moviment d'un ocell que vola en línia recta paral·lela a l'eix x amb el punt d'entrada $(-10, 0, 5)$ i el punt de sortida $(10, 0, 5)$.

A continuació heu d'anar trobant les equacions del moviment dels ocells amb els moviments diferents que es proposen. Per això, tal com heu experimentat en l'exemple 2, només cal que doneu les equacions paramètriques del punt central A .

Una condició indispensable és que els ocells no surtin de la caixa de definició, és a dir han d'entrar per la "paret" del darrere, sortir per la del davant i no sobresortir ni per dalt ni per baix.

3. Un ocell que vola en línia recta i que entra pel punt $(-10, 1, 5)$ i surt pel punt $(10, -3, 7)$.

Resposta:

$\underline{PQ} = (20, 4, 2)$ és un vector que va des de P fins a Q , i per tant l'ocell es mourà amb l'equació paramètrica $(x, y, z) = (-10, 1, 5) + t(20, 4, 2) \quad \forall t \in [0, 1]$. És interessant observar que es podria definir l'ocell prenent un vector paral·lel a PQ ; en aquest cas caldria canviar l'interval de definició del paràmetre t .

4. Dos ocells que volen en una línia recta no paral·lela ni perpendicular a cap dels eixos i que passen per un mateix punt. Cal indicar, raonadament, el punt d'entrada, el punt de sortida i el punt de tall.

Resposta:

Aquest és un cas interessant en què la justificació depèn de l'estratègia per generar la proposta. Un bon raonament que generi directament una bona proposta correcta pot ser suficient per justificar-la, en cas contrari caldrà trobar el punt de tall amb estratègies geomètriques.

Per exemple, podem triar un punt del pla $x = 0$ pel qual volem obligar que passin les dues rectes, per exemple el punt $R = (0, -2, 5)$. Ara sols cal triar dos punts d'entrada amb coordenada $x = -10$ i amb coordenades y i z diferents, per exemple $P = (-10, -3, 6)$ i $Q = (-10, -1, 4)$. Els vectors directors de les rectes hauran de ser $\underline{PR} = (10, +1, -1)$ i $\underline{PQ} = (10, -1, 1)$.

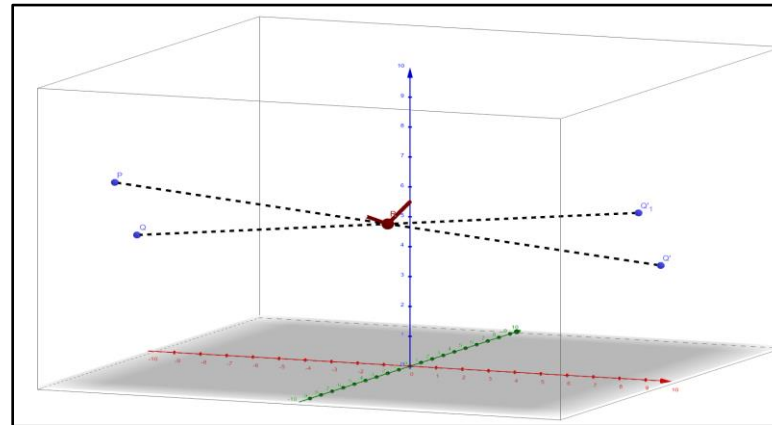
Aquests vectors no són paral·lels ja que els seus components no són proporcionals $\frac{10}{10} \neq \frac{1}{-1}$. Així doncs, els segments de moviment seran:

$$(x, t, z) = (-10, -3, 6) + t(10, +1, -1) \quad \forall t \in [0, 2]$$

$$(x, t, z) = (-10, -1, 4) + t(10, -1, 1) \quad \forall t \in [0, 2]$$

Aquestes dues rectes es tallaran en el punt R , i els punts de sortida seran $P' = (-10, -3, 6) + 2(10, +1, -1) = (10, -1, 4)$

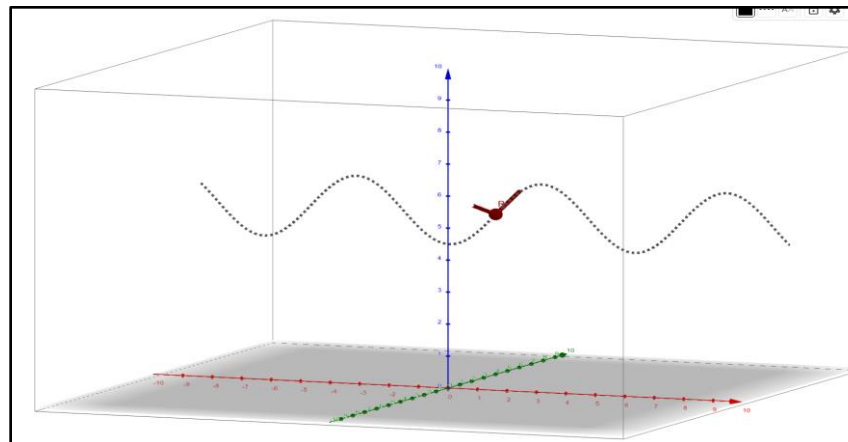
$$Q' = (-10, -1, 4) + 2(10, -1, 1) = (10, -3, 6)$$



5. Un ocell que es mou de manera oscil·latòria pujant i baixant tota l'estona (recordeu indicar el punt d'entrada, el de sortida i les característiques fonamentals del moviment que generarà la funció que heu pensat).

Resposta:

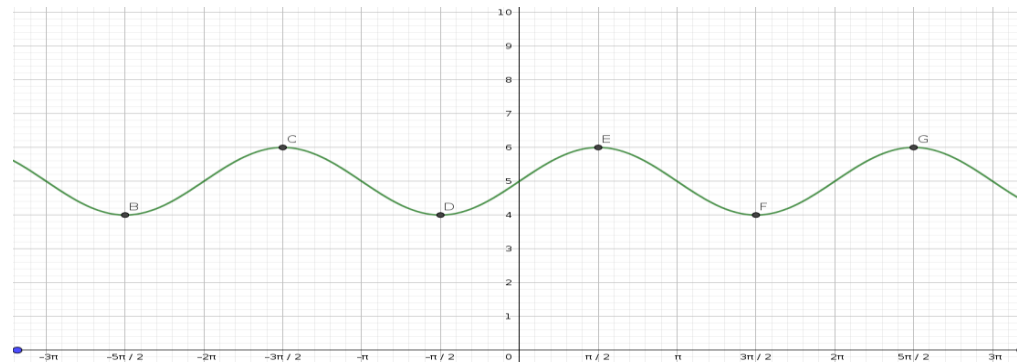
El moviment oscil·latori més simple el generen les funcions trigonomètriques, per exemple un sinus; en aquest cas cal col·locar el sinus en 3D dins la caixa de definició. Per exemple, podem utilitzar: $(t, 4, \sin(t) + 5)$ amb $t \in [-10, 10]$.



En aquest cas el punt d'entrada serà $P = (-10, 4, \sin(-10) + 5)$ i el de sortida, $(10t, 4, \sin(10) + 5)$.

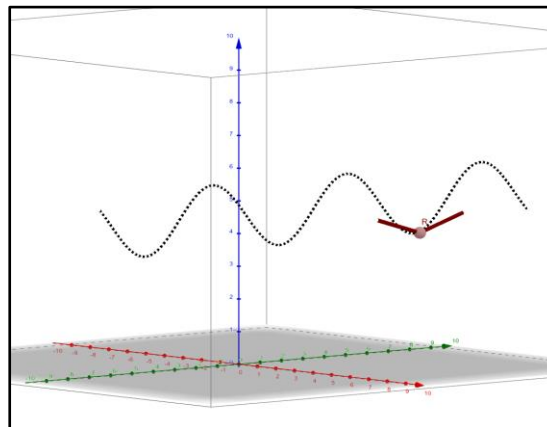
L'ocell no surt de la caixa perquè el moviment sinusoidal té una amplitada de ± 1 , per tant anirà des de la coordenada $z = 4$ fins a $z = 6$, la x travessa de -10 fins a 10 i la y no varia dins la caixa de definició $y = 4$.

Caldrà indicar els extrems que s'hauran de trobar de manera formal; recordem que en cap cas l'ocell pot sortir de la caixa per sota ni per sobre:



6. Un ocell que es mou de manera oscil·latòria però ara de dreta a esquerra paral·lel al pla horitzontal XY.

Resposta: En aquest cas sols cal canviar, raonadament, les coordenades: $(4, t, \sin(t) + 5)$ amb $t \in [-10, 10]$.



Aquesta proposta no té un interès especial excepte el fet d'ajudar l'alumnat a entendre i percebre les diferents direccions del moviment dins la caixa 3D de definició.

7. Un ocell que toca terra, és a dir que baixa fins al pla horitzontal XY i torna a pujar (no oblideu trobar el punt d'entrada, el de sortida i els extrems relatius).

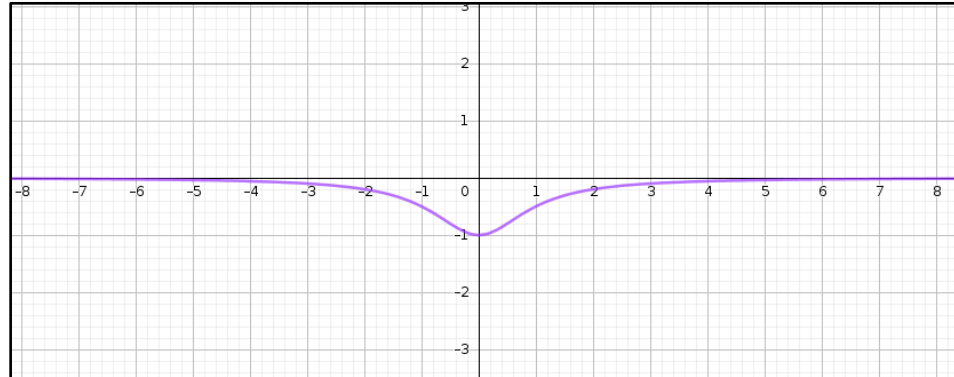
Resposta:

És previsible que l'alumnat utilitzi paràboles; en aquest cas la valoració del criteri 7 pot ser baixa, ja que fins ara no hi ha hagut cap activitat de complexitat conceptual. Per altra banda, si utilitzen paràboles cal que posin un coeficient de la x^2 molt petit per tal que l'ocell entri per una paret i no pel sostre de la caixa de definició.

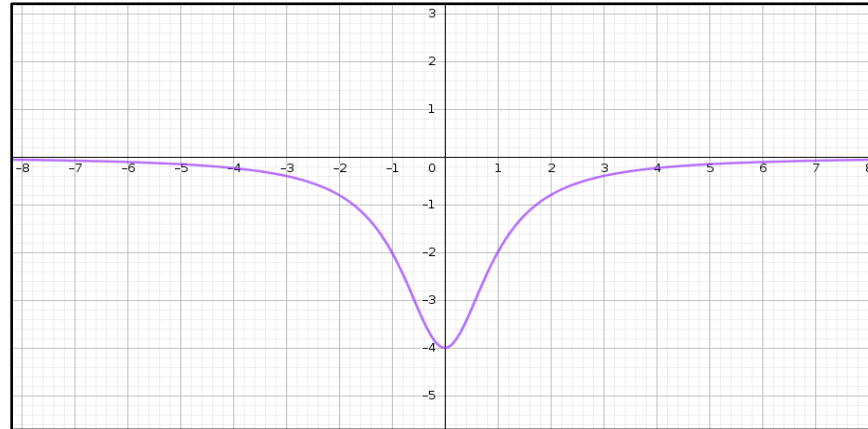
Una bona opció seria utilitzar una modificació de la funció d'exemple $\frac{2}{t^2+1} + 3$.

Podem començar invertint la funció per tal d'aconseguir un moviment descendent i ascendent: si triem, per exemple

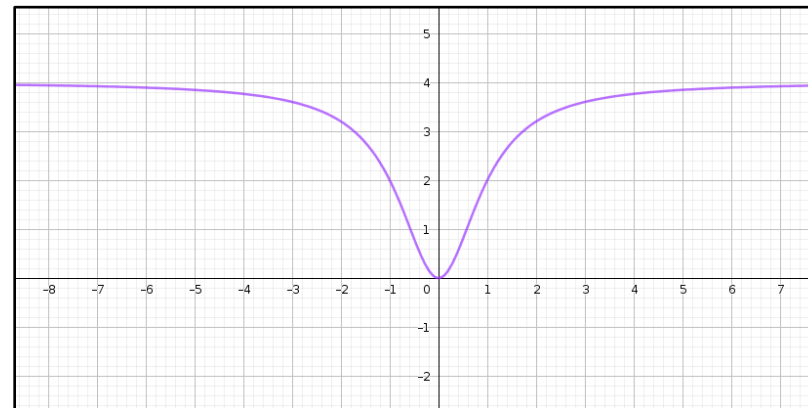
$z(t) = -\frac{1}{t^2+1}$ obtindrem la funció:



Per tal d'augmentar-ne una mica l'amplada, podem multiplicar-la per 4 per exemple:

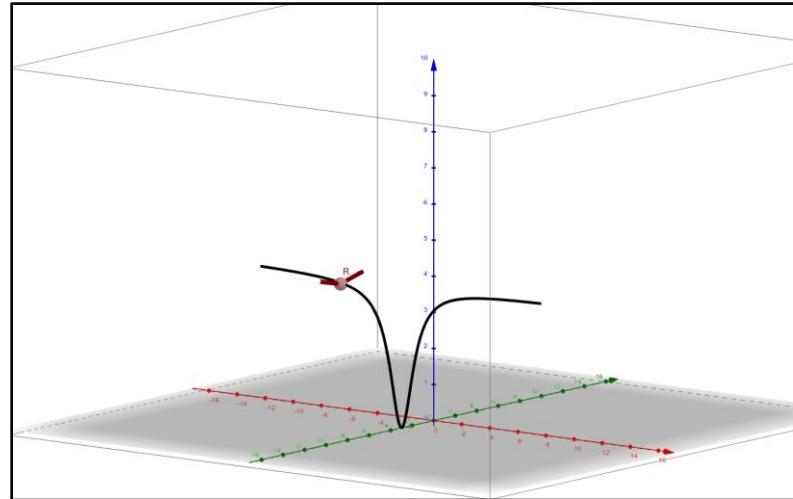


Finalment, només caldrà pujar la funció 4 unitats.



La corba en 3D quedarà:

$$\left(t, -3, \frac{-4}{t^2+1} + 4\right) \text{ amb } t \in [-10, 10]$$



Un cop trobada la funció, caldrà donar els punts d'entrada i sortida:

$$P = \left(-10, -3, \frac{-4}{101} + 4\right)$$

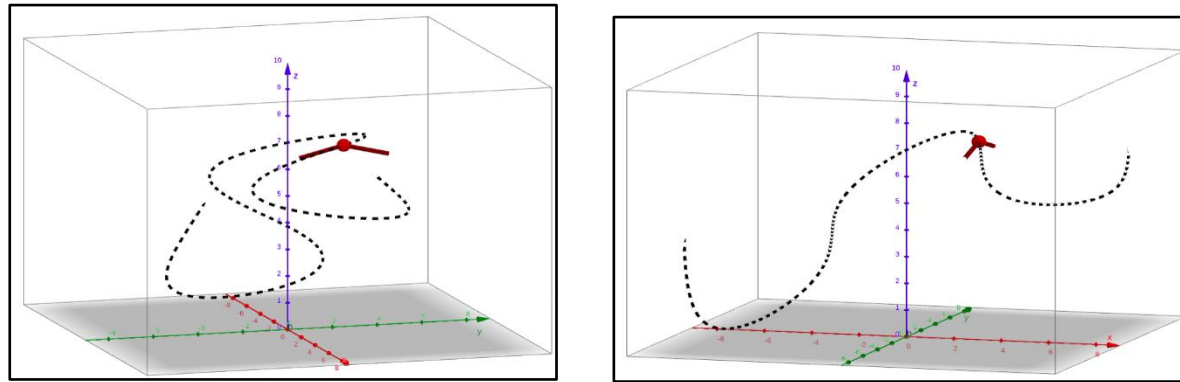
$$P' = \left(10, -3, \frac{-4}{101} + 4\right)$$

així com el mínim, que s'obtéindrà fàcilment de trobar les arrels de la derivada

$$z(t) = \frac{-4}{t^2+1} + 4, \text{ amb la seva derivada } z'(t) = \frac{8t}{(t^2+1)^2} \text{ que té com a única arrel } x = 0.$$

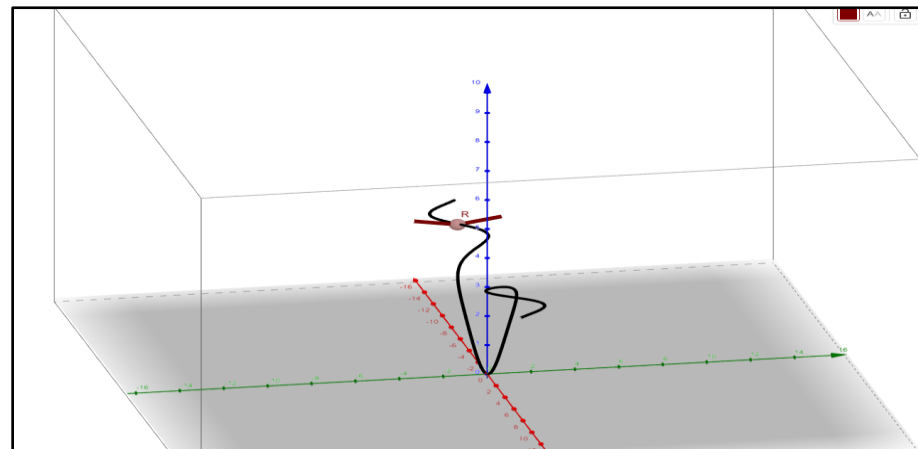
Seria desitjable trobar altres característiques de la funció, com són punts de tall, asímptotes, punts d'inflexió, etc.

- Finalment, dissenyeu un moviment complex, totalment tridimensional combinant dues funcions, una que determini el moviment vertical en Z: $z = g(x)$ i una altra que determini simultàniament el moviment horitzontal en Y: $y = f(x)$, és a dir $(t, f(t), g(t))$. Trieu les dues corbes amb originalitat, trobeu les seves expressions matemàtiques en 2D, trobeu les seves característiques, representeu-les i indiqueu quin moviment espereu que es generi en programar-la en aquesta virtualització.



Resposta: Resulta molt difícil predir què pot posar aquí cada estudiant, i serà un apartat ideal per valorar aspectes com la creativitat, la capacitat d'autoregulació, la comunicació, etc. Com a exemple podem combinar les dues propostes anteriors, la funció trigonomètrica amb la funció amb un sol mínim:

$$\left(t, \sin(t), \frac{-4}{t^2 + 1} + 4\right)$$



En aquest moviment l'ocell combina un moviment oscil·latori de dreta a esquerra amb una baixada a tocar terra. Totes les característiques d'ambdues funcions ja han estat escrites.