Matemàtiques

Criteris específics d'avaluació

La prova s'avaluarà seguint el criteri d'avaluació en tres nivells d'assoliment. Per tant, cada criteri pot valorar-se amb 1, 2 o 3 punts, excepte el criteri que fa referència a provar diferents estratègies, que es valora amb 1 punt. La suma total de punts és de 13.

Entenem per error significatiu aquell error d'operació que distorsioni clarament algun resultat i generi una incoherència que l'alumne no detecti. També serà error significatiu els errors conceptuals o que mostrin una mancança de l'estudiant. Aquests tipus d'errors es penalitzaran explícitament.

Un error no significatiu és aquell error d'operació que no implica una mancança de coneixement, sinó que és fruit d'un descuit fortuït. No es penalitzaran en cap moment els errors no significatius.

La suma dels punts totals és 13, per tant caldrà dividir la qualificació final entre 1,3.

Criteris d'avaluació	Indicadors	Valor	Total
Identificar les matemàtiques implicades en la situació plantejada	Identifica algun dels elements que permeten dissenyar la copa (el llenguatge de funcions, la integral indefinida o el coeficient de dilatació).	1 punt	**3 punts**
	Identifica gairebé tots del elements que permeten dissenyar la copa (el llenguatge de funcions, la integral indefinida o el coeficient de dilatació) o bé els identifica però amb algun error significatiu.	2 punts	
	Identifica el llenguatge de funcions, la integral indefinida i el coeficient de dilatació com els elements matemàtics que permeten dissenyar una copa, i és capaç de descriure amb correcció i coherència alguna de les seves característiques.	3 punts	

Expressar la situació en llenguatge matemàtic utilitzant variables, símbols, diagrames...	La funció que tria s’ajusta a algun dels requisits pel que fa a la forma: proporcionada, sense base, amb obertura, amb una part ampla.	1 punt	
	La funció que tria s’ajusta a la majoria dels requisits (pel que fa a la forma) en algun dels elements fonamentals (proporcionada, sense base, amb obertura, amb una part ampla). O bé, tot i que compleixi els requisits no determina el màxim o no representa gràficament la funció de manera correcta.	2 punts	
	La funció que tria per fer la copa s’ajusta perfectament als requisits pel que fa a la forma, proporcionada, sense base, amb obertura, amb una part ampla. Representa gràficament la funció de manera correcta i troba el màxim.	3 punts	**3 punts**
Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre la situació plantejada	Fa alguna de les tasques essencials pel que fa a determinar la mida de la copa: calcular el volum (per la regla de Barrow), trobar el coeficient de dilatació i escriure la funció final o bé ho fa amb molts errors significatius.	1 punt	
	Fa algun error significatiu o bé es deixa alguna de les tasques essencials pel que fa a determinar la mida de la copa: calcular el volum (per la regla de Barrow), trobar el coeficient de dilatació i escriure la funció final.	2 punts	
	Calcula el volum amb la regla de Barrow, troba el coeficient de dilatació i escriu correctament la funció que es demana. (La puntuació serà màxima encara que estigui treballant amb una funció que no compleixi tots els requisits o que, sense complir els requisits, tingui interès en el context del problema.)	3 punts	
Usar amb soltesa la calculadora	En el cas que no hagi fet la integral per la regla de Barrow però que calculi el volum correctament amb la calculadora, sumarem un punt al criteri anterior, que, en qualsevol cas, no podrà superar els 3 punts.	+1 punt	**3 punts**
Mantenir una actitud de recerca provant diferents estratègies i demostrant la capacitat de triar les solucions més senzilles, útils o elegants	Ha experimentat amb més d’una funció i finalment ha triat la més satisfactòria.	1 punt	**1 punt**

Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió	Redacta la seva proposta seguint un format pregunta-resposta sense donar una coherència global al text que lliura. L'explicació no s'entén per si mateixa sense el suport de l'enunciat. Defensa la seva copa però sense fer referència als elements que la caracteritzen o amb errors significatius de càlcul. S'expressa d'una manera bàsica amb poc vocabulari i poc raonament matemàtic.	1 punt	
	Redacta amb un format més d'informe que de pregunta-resposta, però hi ha poca fluïdesa expressiva. S'entén, amb dificultat, sense el suport de l'enunciat. Defensa la seva copa fent poca referència als elements que la caracteritzen, que, majoritàriament, els calcula sense errors significatius. El llenguatge matemàtic i la seva expressió és millorable.	2 punts	
	Redacta un informe amb un llenguatge lineal i coherent de manera que s'entén tot el que fa sense cap necessitat de recórrer a l'enunciat. Defensa la seva copa fent referència als elements que la caracteritzen i que ha calculat amb correcció i coherència. Utilitza el vocabulari matemàtic amb precisió.	3 punts	**3 punts**

Criteris específics d'avaluació complementaris

Aquesta prova permet valorar la capacitat de l'alumne per utilitzar de forma creativa les matemàtiques estudiades al batxillerat. Les possibles respostes són múltiples, i es valorarà el domini dels coneixements matemàtics per modelitzar i generar idees, formes, objectes..., amb una finalitat pràctica però també estètica. En aquest sentit, es requereix partir de funcions polinòmiques fàcilment controlables amb les seves arrels, buscar la sinuositat de les funcions trigonomètriques, utilitzar les arrels del polinomi per facilitar els càlculs posteriors de la integral o, fins i tot, arriscar-se amb funcions exponencials i logarítmiques més complexes.

Es valoraran dos aspectes. D'una banda, com planteja el problema: d'on parteix i com evoluciona; de l'altra, com justifica que la forma triada permet l'ús que es demana: No té base? Té una part més ampla però no exageradament ampla? L'altura és raonable?...

Cal recordar que un dels criteris a avaluar és *Mantenir una actitud de recerca provant diferents estratègies i demostrant la capacitat de triar les solucions més senzilles, útils o elegants.* Per seguir aquest procés és condició indispensable que l'alumne hagi lliurat tots els raonaments, proves, conjectures i estratègies diferents escrits en el quadernet.

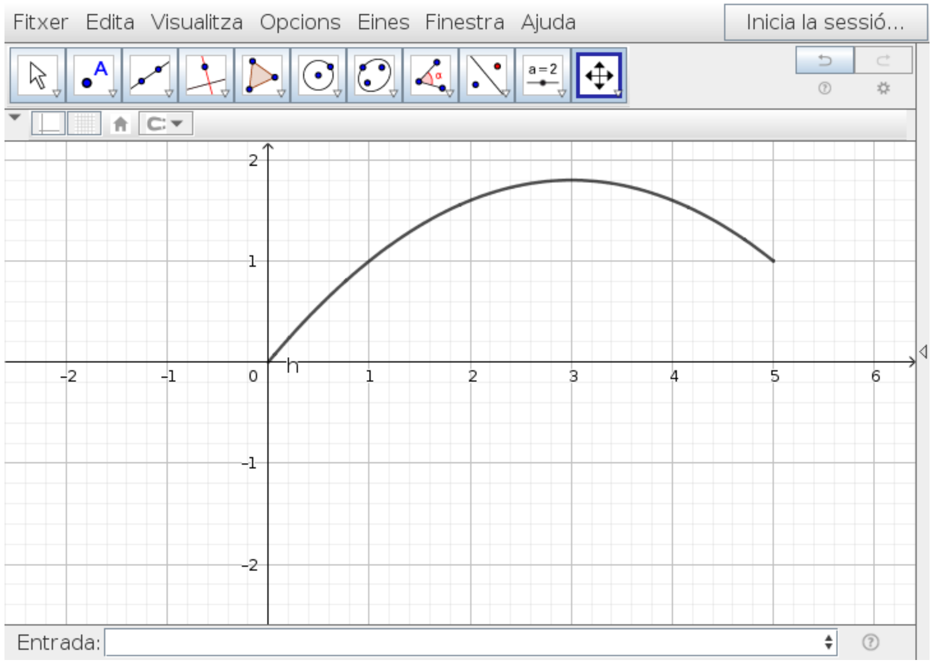
La tria de la funció determinarà tot el que es faci després. En aquest sentit, es pot valorar la capacitat sintètica a partir de la tria de la funció i l'ús que en faci després.

Òbviament ha de ser capaç de verbalitzar què fa i per què ho fa.

Vegem-ne algunes possibles solucions.

Suposem que l'interval de definició sigui [0,5]; en aquest cas podríem explorar amb funcions com per exemple:
$\boldsymbol{f(x) = \frac{-x^2+6x}{5}}$; $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$; $\boldsymbol{f(x) = \ln(x+1)}$; $\boldsymbol{f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$; $\boldsymbol{f(x) = 2\cos(\frac{x}{2})}$

La funció cosinus, per exemple, no seria vàlida en l'interval [0,5] que hem donat, ja que no té arrel en $x = 0$. Les funcions $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ i $\boldsymbol{f(x) = \ln(x+1)}$ donen una solució original però no vàlida amb les condicions perquè no tenen cap màxim en el seu domini. Les funcions sinusoïdals serien unes funcions a considerar, ja que permeten dissenyar fàcilment la forma que es busca, tot i la dificultat que pot tenir utilitzar la fórmula del sinus de l'angle doble necessària per calcular la integral.



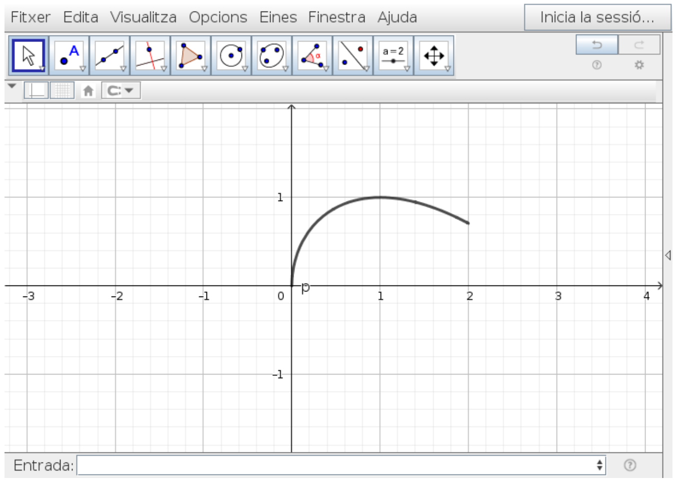
Es valorarà positivament si un alumne ha utilitzat una funció de la qual no ha pogut integrar el seu quadrat però que ha estat capaç de trobar-ne la integral definida a la calculadora i després ha fet bé les primitives per trobar la superfície (en què no cal elevar-ho al quadrat).

La manera més senzilla de modelar funcions és fer-ho amb arrels d'un polinomi. En aquest cas, amb dues arrels en tindríem prou; però cal tenir en compte que com més separades posem les arrels més deformada quedarà la copa pel que fa a la seva amplada. L'alumne hauria de ser capaç de triar dues arrels prou properes, per exemple 0 i un valor entre 1 i 2, o bé aplicar factors que li permetin rebaixar l'amplada de la copa, és el cas de $-x(x-6)$ en l'interval [0,5], que genera una copa de 18 cm d'ample, però que es podria arreglar dividint-la, per exemple, per 5 o per 6.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{-x^2+6x}{5}}$$

Altres solucions poden ser molt millors, perquè tenen un disseny estèticament molt més adequat i atrevit i al mateix temps simplifiquen molt els càlculs de la integral pel que fa al volum. Per exemple:

$\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{x}(3-x)}{2}}$ a l'interval [0,2]



Tot i que hi ha moltes possibles solucions, a continuació s'exposa la solució polinòmica, que seria la forma més habitual de resoldre-ho.

$\boldsymbol{f(x) = \frac{-x^2+6x}{5}}$ a l'interval [0,5]

L'alumne ha de donar la fórmula, el gràfic i una justificació de per què ha triat aquesta funció o almenys de com l'ha deduït.

El volum

El volum requereix el càlcul de la integral definida:

$$\int_0^5 \pi\left(\frac{-1}{5}x(x-6)\right)^2 dx = \frac{\pi}{25}\int_0^5 (x^4 - 12x^3 + 36x^2)\, dx = \left[\frac{1}{25}\pi\left(\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 12x^3\right)\right]_0^5 = 10\pi$$

La mida

Per modificar la mida cal aplicar un factor *k* de dilatació, que no modificarà la forma.

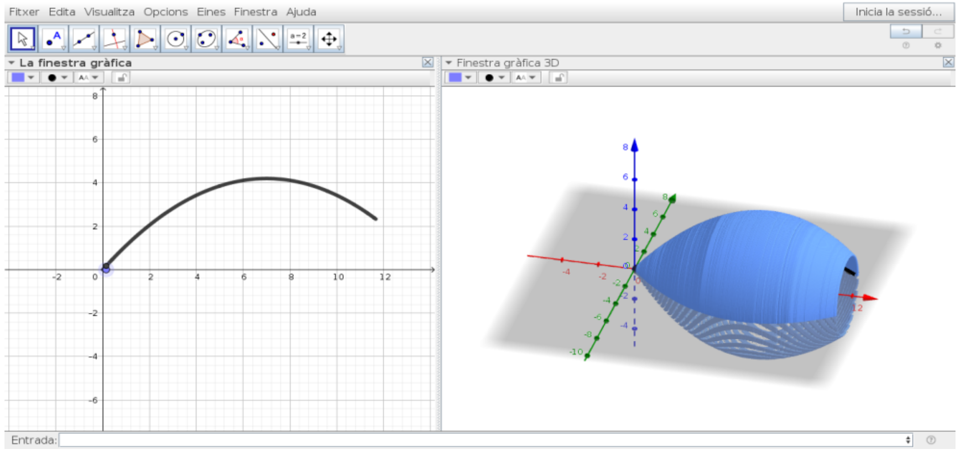
Si es dilata un objecte amb un factor de dilatació lineal *k*, el volum augmentarà amb un factor k^3, d'aquesta manera $10\pi k^3 = 400$ i, per tant, $\sqrt[3]{\frac{400}{10\pi}} = \sqrt[3]{\frac{40}{\pi}} = \mathbf{2,335.}$

Per facilitar les expressions es poden arrodonir els valors, ja que no es tracta d'un objecte de precisió. Arrodonir-ho a 2 seria massa exagerat; un arrodoniment a 2,3 estaria bé i, fins i tot, una expressió molt propera en forma de fracció, com per exemple 7/3.

La funció definitiva quedaria: $y = \frac{-3}{35}x^2 + \frac{6}{5}x$ a l'interval [0, 35/3]

Les seves característiques

Treballant sobre l'exemple que s'està modelitzant $y = \frac{-3}{35}x^2 + \frac{6}{5}x$ a l'interval [0, 35/3]:



L'alçària de la copa vindria indicada pel domini de definició de la funció; és a dir, 35/3, que aproximadament serien 11,7 cm.
Per trobar l'amplada podem recórrer a la derivada: $y' = \frac{-6}{35}x + \frac{6}{5}$= 0.
El màxim es trobarà a *x* = 7 i és $f(7) = \frac{-3}{35}7^2 + \frac{6}{5}7 = \frac{21}{5}$.
Per tant, l'amplada de la copa serà 42/5, és a dir 8,4 cm.
La boca de la copa faria $2f\left(\frac{35}{3}\right) = 2\left(\frac{-3}{35}\left(\frac{35}{3}\right)^2 + \frac{6}{5}\left(\frac{35}{3}\right)\right) = \frac{14}{3}$, és a dir uns 4,7 cm.
La superfície de màxima oxigenació seria: $Smo = \pi(\frac{21}{5})^2 = 55,4\ cm^2$.

Finalment, la superfície lateral seria:
$2\pi \int_0^{\frac{35}{3}} (\frac{-3}{35}x^2 + \frac{6}{5}x)\, dx$ = $\left[\frac{-2}{35}\pi x^3 + \frac{6}{5}\pi x^2\right]_0^{\frac{35}{3}}$= $\frac{1960}{27}\pi$ = 228 cm².

La defensa de la copa

Amb tots els elements controlats que defineixen la copa dissenyada, l'alumne ha de ser capaç de fer un esbós prou correcte i acurat de la copa. Pot, per exemple, afegir una taula de valors i intentar fer un dibuix tridimensional en què indiqui les mesures de cada element de la copa.

L'alumne ha de ser capaç de mostrar en tot moment que sap què està fent, per què ho està fent i com ho podria millorar, i ho ha d'expressar d'una manera clara i entenedora. Per exemple, la copa que s'ha utilitzat de model és una copa d'unes dimensions adequades pel que fa a l'alçària i l'amplada, però té una boca massa petita per beure còmodament.

Algunes valoracions que pot fer l'alumne són que amb més temps i disposant del GeoGebra es podria modificar el disseny i aconseguir una boca més gran o més ampla per la part de sota, que amb la funció que ha triat (presumiblement una paràbola) la copa ha esdevingut caricaturitzada amb una amplada desproporcionada... i indicar quines modificacions caldria fer per millorar-la.