Matemàtiques

Criteris específics d'avaluació

La prova s'avalua seguint el criteri d'avaluació a tres nivells d'assoliment. Per tant, cada criteri pot valorar-se amb 1, 2 o 3 punts, excepte els criteris que fan referència a identificar les matemàtiques implicades en la situació plantejada i l'ús de la calculadora, que es valoren amb 1 punt. La suma total de punts és de 14.

Entenem per error significatiu aquell error d'operació que distorsioni clarament algun resultat i generi una incoherència que l'alumne no detecti. També seran errors significatius els errors conceptuals o que mostrin una mancança de l'estudiant. Aquests tipus d'errors es penalitzaran explícitament.

Un error no significatiu serà aquell error d'operació que no implica una mancança de coneixement, sinó què és fruit d'un descuit fortuït. No es penalitzaran en cap moment els errors no significatius.

La suma dels punts totals és 14, per tant caldrà dividir la qualificació final entre 1.4 per tal d'ajustar-la al màxim estàndard de 10 punts.

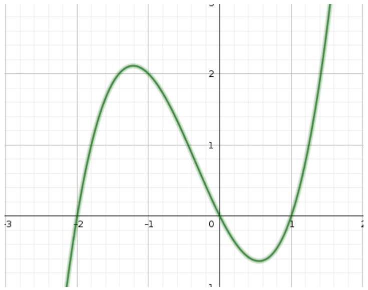
Criteris d'avaluació	Indicadors	Valor
1. Identificar les matemàtiques implicades en la situació plantejada	Identifica les funcions i les seves propietats elementals, com són els punts de tall, extrems relatius, comportament, etc., com el recurs matemàtic que permet resoldre la situació plantejada.	**1**
2.a. Expressar la situació en llenguatge matemàtic utilitzant variables, símbols, diagrames...	Utilitza el llenguatge matemàtic de manera correcta, expressant les funcions, el domini, les derivades, els intervals, el feix de segments, etc., amb el llenguatge matemàtic correcte. Afegeix gràfics acurats de les funcions.	**3**
2.b. Expressar la situació en llenguatge matemàtic utilitzant variables, símbols, diagrames...	Utilitza el llenguatge de funcions amb correcció formal però amb alguns errors i/o es mostra poc explícit en l'ús del llenguatge matemàtic. Fa els gràfics amb certa correcció, però són poc clars o tenen petits errors.	**2**
2.c. Expressar la situació en llenguatge matemàtic utilitzant variables, símbols, diagrames...	Resol la situació amb un llenguatge matemàtic pobre o amb errors, com per exemple no utilitzar el llenguatge d'intervals correctament. No inclou gràfics o els fa amb molt poc rigor (eixos molt torts, eixos sense noms, molt allunyats de la realitat, etc.).	**1**

Criteris d'avaluació	Indicadors	Valor
3.a. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre la situació plantejada	Troba les dues funcions amb capacitat creativa en el context de l'obra d'art, són versemblants i utilitza totes les eines i estratègies matemàtiques necessàries per resoldre la situació. Fa la descripció de les funcions amb la primera i segona derivada, troba correctament els extrems relatius, punts d'inflexió, comportament, etc., i troba el feix de rectes demanat.	**3**
3.b. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre la situació plantejada	Troba funcions de poca complexitat, per exemple amb un sol extrem i d'estudi força senzill. També es valorarà amb 2 punts si troba funcions complexes i versemblants en el context però desprès fa un estudi incomplert i amb alguns errors.	**2**
3.c. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre la situació plantejada	Troba solucions molt senzilles, com per exemple funcions monòtones, o extremadament trivials, de manera que no necessita utilitzar estratègies i eines matemàtiques. També es valorarà amb un punt si les funcions són inversemblants amb unes torsions que fan impossible la seva construcció. Finalment també es valorarà amb un punt si les funcions són complexes i correctes però no en fa una descripció matemàtica o la fa de manera incorrecta i/o no utilitzant les eines matemàtiques adients.	**1**
4. Usar la calculadora amb soltesa	Utilitza la calculadora amb correcció posant els resultats sense trobar els valors decimals quan està fent una tasca més genèrica i arrodonint amb correcció quan necessita trobar valors aproximats per descriure l'obra d'art.	**1**

Criteris d'avaluació	Indicadors	Valor
5.a. Mantenir una actitud de recerca, provar diferents estratègies i demostrar la capacitat de triar les propostes més originals, versemblants i estèticament interessants	Es mostra molt creatiu en la producció de l'obra d'art i aplica funcions diferents a la base i la part superior, que ofereixen una torsió estèticament interessant i que requereixen un ús de la matemàtica de qualitat. Es mostra inconformista i intenta crear una obra d'art complexa i interessant.	**3**
5.b. Mantenir una actitud de recerca, provar diferents estratègies i demostrar la capacitat de triar les propostes més originals, versemblants i estèticament interessants	Tot i trobar una de les funcions interessants i fer bé l'estudi, la combinació de les dues funcions és poc creativa perquè són funcions similars. Mostra una actitud poc activa pel que fa a la seva creació.	**2**
5.c. Mantenir una actitud de recerca, provar diferents estratègies i demostrar la capacitat de triar les propostes més originals, versemblants i estèticament interessants	Tot i trobar una de les funcions interessants i fer bé l'estudi la combinació de les dues funcions, no aporta aspectes interessants des del punt de vista creatiu, i utilitza, per exemple, la mateixa funció per la base i la part de sobre, o funcions gairebé idèntiques. Mostra una actitud conformista pel que fa a la seva creació.	**1**
6.a. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió	Redacta d'una manera perfectament comprensible sense seguir una estructura "pregunta-resposta" i aportant explicacions i descripcions de la seva obra d'art.	**3**
6.b. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió	Redacta d'una manera ordenada però incompleta, amb poques paraules, sense nexes i de manera telegràfica.	**2**
6.c. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió	Redacta de manera caòtica i poc comprensible de manera que cal intuir el que vol expressar.	**1**

Criteris específics d'avaluació complementaris. Exemple de resolució

Per començar, caldria pensar en una funció amb una forma que tingui interès en el context de l'obra d'art que ens ocupa. No seria raonable, per exemple, utilitzar l'equació d'una recta o una funció monòtona. Per tal de tenir formes sinuoses, seria interessant emprar funcions polinòmiques, trigonomètriques o combinades.



Per exemple, podem dissenyar un mur de 5 metres d'amplada a partir d'un polinomi amb arrels -2, 0 i 1: $P(x) = x(x+2)(x-1)$ definit en [-3, 2], que ha de generar una forma sinuosa amb punts de tall en les 3 arrels, però aquesta forma podria no ser prou versemblant per utilitzar-la en la construcció del mur perquè té una curvatura massa gran. Si calculem els extrems relatius, podem modificar la funció per tal de modelar-la millor.

$$P(x) = x(x+2)(x-1) = x^3 + x^2 - 2x$$

$P'(x) = 3x^2 + 2x - 2 = 0$ que té dues arrels: $x = \frac{-2\pm\sqrt{28}}{6} = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$ aproximadament en els valors

-1.2153 i 0.5486

Aquestes arrels generen dos extrems:

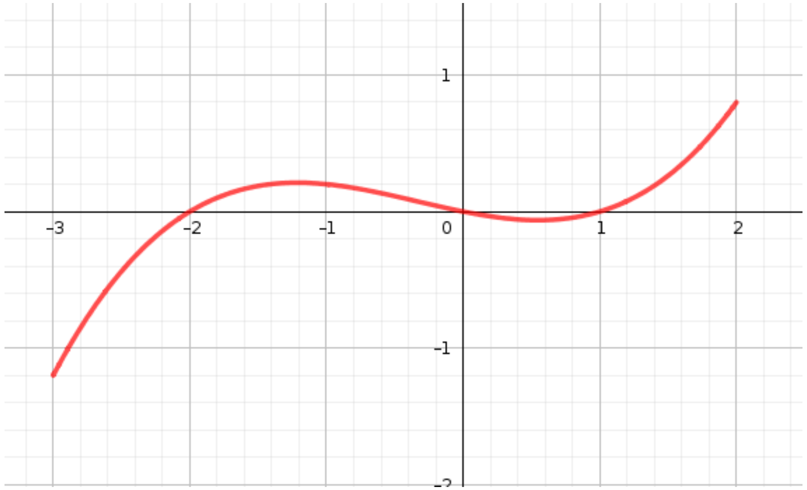
un màxim relatiu: $P(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}) = 2.1126$

i un mínim relatiu en $P(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}) = -0.63113$

També haurem de trobar els extrems en la frontera del intervals, és a dir *x*=-3 i *x*=2

$P(-3) = -12$, $P(2) = 8$

Com que els valors són poc realistes pel seu propòsit, sobresurt de la superfície de 5m x 2m, podem aplanar la corba i reconsiderar el interval de definició, per exemple dividir la funció entre 10, amb la qual cosa la nova funció seria: $f(x) = \frac{1}{10}x(x+2)(x-1) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{5}x$ Així, els extrems quedarien situats en:
(-3, -1.20), (-1.2, 0.21), (0.5, -0.06) i (2, 0.80) obtenint la base següent per la nostra obra d'art:



Ara podem acabar d'analitzar les característiques d'aquesta funció.

Punts d'inflexió: $f''(x) = \frac{1}{10} \cdot (6x + 2) = 0$ per tant $x = \frac{-1}{3}$, $f(\frac{-1}{3}) = 0.074$, el punt d'inflexió seria (-0.33, 0.074).

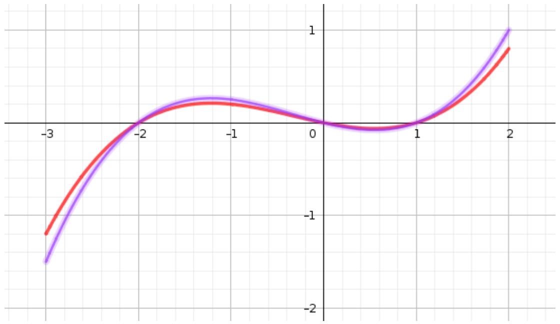
El comportament de la funció vendria determinada pels vèrtex, per tant creix des de (-3, -1.2) fins (-1.2, 0.21), decreix fins (0.5, -0.06), finalment creix fins (2, 0.8).

Per altra banda, la funció serà convexa des de (-3, -1.2) fins el punt (-0.33, 0.075) i còncava a partir d'aquest punt fins (2, 0.8)

Els punts de tall i el domini ja s'han establert en la construcció inicial de la funció.

Si volem expressar la funció en **R**³ en el pla XY, consideraríem *x* un paràmetre lliure i la funció vindria determinada pel conjunt de punts $A(x) = (x, \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{5}x, 0)$ amb $x \in [-3,2]$.

Si construïm el mur agafant la mateixa funció *g(x)=f(x)* per la part superior, el resultat creatiu seria molt pobre i, per tant, no podria tenir una valoració màxima amb els criteris d'avaluació. Una alternativa senzilla seria prendre un altre factor d'aplanament diferent; per exemple, si en comptes de dividir per 10 dividim per 8, els extrems relatius serien superiors i el mur seria artísticament més interessant, però matemàticament no hi hauria una millora gaire substancial ja que tots els paràmetres de la funció serien els mateixos que la funció original *P(x)* dividits per 8.



Resultaria molt més interessant emprar una funció diferent, per exemple un polinomi amb unes arrels lleugerament diferents aporta una interessant torsió a l'escultura i seria una bona alternativa amb una valoració màxima.

També podem optar per una funció amb una forma similar però amb una construcció inicial diferent; per exemple, una funció trigonomètrica. Si observem la forma del polinomi *f(x)*, veiem que es una mica similar a -*sin*(*x*); per mantenir la funció en un rang similar a *f(x)*, podem multiplicar-la per 0.2 i que els seus extrems siguin -0.2 i 0.2, valors similars a la funció *f(x).* Finalment, els punts de tall de la funció sinus són els múltiples de π, és a dir, poc més de 3. Si volem tenir uns punts de tall propers als de *f(x)*, podem prendre $sin(2x)$ amb la qual cosa els punts de tall passaran a ser $\frac{\pi}{2}$

Aquest raonament ens porta a triar com a funció superior $g(x) = -0.2sin(2x)$en l'interval [-3,2].

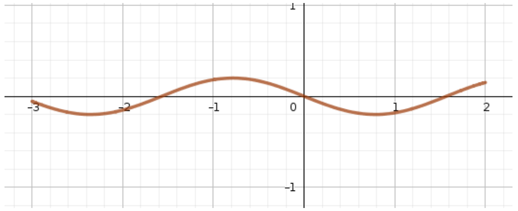
Les característiques d'aquesta funció serien les següents:

Els punts de tall als eixos són $x = \frac{arcsin(0)}{2} = 0 + k\frac{\pi}{2}$; és a dir, al voltant de ± 1.6. $k \in \mathbb{Z}$

tenint en compte que la derivada del sinus és el cosinus, els vèrtex se situarien en $x = \frac{arccos(0)}{2} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ que en el domini definit generaria els vèrtex:

$(\frac{-3\pi}{4}, -0.2)$, $(\frac{-\pi}{4}, 0.2)$,$(\frac{\pi}{4}, -0.2)$, als que hauríem d'afegir els extrems a la frontera de l'interval: (-3, -0.056) i (2, 0.15).

Els punts d'inflexió coincidirien amb els punts de tall pel retorn al sinus de la segona derivada del propi sinus.

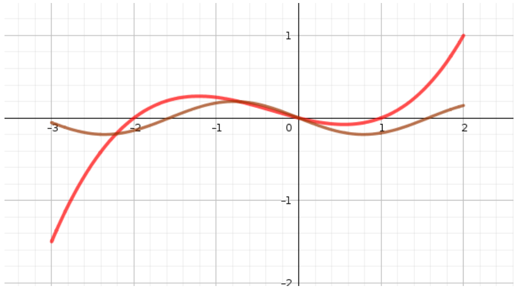


La funció *g(x)* decreix en els intervals [-3,$\frac{-3\pi}{4}$) i$(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ i creix en els intervals $(\frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4})$i ($\frac{-\pi}{4}$, 2]

És còncava en $[-3 \frac{-\pi}{2})$ i en$(0, \frac{-\pi}{2})$i convexa en $(\frac{-\pi}{2}, 0)$ i $(\frac{\pi}{2}, 2)$ claudator

La funció *g(x)* expressada dins el pla *z* = 2 en **R³**, en funció d'un paràmetre $x \in [-3,2]$ seria $B(x) = (x, -0.2sin(2x), 2)$

Si ajuntem les dues funcions en uns únics eixos de coordenades podem intuir la construcció de l'escultura.



Finalment el mur es podria construir a partir d'un feix de segments entre els punts *A(x) i B(x)*, A l'exemple que hem creat el vector director d'aquest segment seria $\underline{AB} = (0, \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{5}x + 0.2sin(2x), 2)$ amb el que construiria el feix de segments:

$$X = A + \lambda \underline{AB} = A(x) = (x, \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{5}x, 0) + \lambda(0, \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{5}x + 0.2sin(2x), 2)$$

$$\forall \lambda \in [0,1]$$

Si convertim aquestes expressions amb un llenguatge de programació visual, com per exemple el Geogebra, podem veure la següent escultura: