

Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic

A FAVOR
DE L'ÈXIT
ESCOLAR

2a edició
actualitzada

Identificació i desplegament
a l'educació secundària obligatòria

Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic

Identificació i desplegament
a l'educació secundària obligatòria

URL: www.gencat.cat/ensenyament



Aquest llibre està publicat amb una llicència Creative Commons Reconeixement-NoComercial-SenseObra Derivada 4.0.

No es permet l'ús comercial de l'obra original ni la generació d'obres derivades.

La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.ca>

Aquest document ha estat elaborat per un grup de treball coordinat per la Dra. Carme Burgués i el Dr. Jaume Sarramona

© **Generalitat de Catalunya**
Departament d'Ensenyament

Elaboració: **Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat**

Edició: **Servei de Comunicació i Publicacions**

2a edició actualitzada: **novembre de 2015**

Disseny de la coberta: **Estudi Carme Vives**

Índex

Presentació	5
Introducció	6
Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic	8
Dimensió resolució de problemes	9
• Competència 1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats	10
• Competència 2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes	14
• Competència 3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses	18
• Competència 4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes	21
Dimensió raonament i prova	25
• Competència 5. Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques	26
• Competència 6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics	29
Dimensió connexions	32
• Competència 7. Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar	33
• Competència 8. Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes	36
Dimensió comunicació i representació	39
• Competència 9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic	40
• Competència 10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres	43
• Competència 11. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques	46
• Competència 12. Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics	50
Annex 1	
Continguts clau de les competències	54
Annex 2	
Relació entre dimensions a través de les competències	55
Annex 3	
Connexions entre continguts clau	56

Annex 4

Correspondència entre els continguts clau vinculats a les competències i la formulació de continguts curriculars..... 57

Annex 5

Competències i nivells de gradació..... 59

Annex 6

Portals de referència del Departament d'Ensenyament..... 62

Annex 7

ARC (aplicació de recursos al currículum) 64

Presentació

El Govern de la Generalitat de Catalunya, mitjançant el Departament d'Ensenyament, promou i lidera una ofensiva de país a favor de l'èxit escolar, que vol implicar i comprometre tota la societat catalana, amb l'objectiu de millorar els resultats educatius i reduir les taxes de fracàs escolar i d'abandó dels estudis.

La Unió Europea ha establert objectius educatius, en el marc de l'Estratègia Europa 2020 (ET-2020), que han de permetre l'assoliment d'una economia intel·ligent, inclusiva i sostenible. Uns objectius que Catalunya assumeix i que l'obliguen a focalitzar els esforços del Govern en la millora dels resultats escolars i del nivell formatiu dels ciutadans, per aconseguir el ple desenvolupament personal, professional i social al llarg de la vida. Dins d'aquests objectius europeus s'inclou que, en l'horitzó 2020, *el percentatge d'alumnes de 15 anys amb baix rendiment en competències bàsiques en lectura, matemàtiques i ciències hauria de ser inferior al 15 %*.

En els darrers cursos, el Departament d'Ensenyament ha realitzat diverses avaluacions externes de caràcter mostral (avaluacions diagnòstiques, proves PISA, etc.) i ha portat a terme avaluacions externes a tot l'alumnat de 6è d'educació primària i de 4t curs d'educació secundària obligatòria, en què l'objectiu és determinar el grau d'assoliment de l'alumnat en competències bàsiques, amb la finalitat de promoure l'adopció de mesures que permetin la millora de la qualitat del sistema educatiu i dels centres, així com la millora de l'activitat docent del professorat.

D'altra banda, d'acord amb l'article 97 de la LEC (Llei 12/2009, de 10 de juliol, d'educació), els centres exerceixen l'autonomia pedagògica, a partir del marc curricular establert en el Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria, on es concreten les competències bàsiques, els continguts i els criteris d'avaluació.

Dins d'aquest marc de referència, el Departament d'Ensenyament ha impulsat l'elaboració de diversos documents per al desplegament i concreció de les competències associades a les diferents matèries del currículum. El document que ara presentem correspon a la competència bàsica de l'**àmbit matemàtic** per a l'educació secundària obligatòria.

Els elements que componen el document aporten informació relativa a la gradació de l'assoliment de les competències de l'àmbit al final de cada etapa educativa, la identificació dels continguts clau associats a cada competència, les orientacions metodològiques per a l'aplicació a l'aula, exemples d'activitats d'avaluació amb indicadors relacionats amb els diferents graus d'assoliment i, finalment, una referència als recursos actualment disponibles on es poden trobar exemples pràctics d'activitats d'aula relacionats amb el desenvolupament de les competències (aplicació de recursos al currículum - ARC).

Aquest document ha estat elaborat amb la participació de professionals de l'àmbit universitari i de professorat dels centres públics i privats de Catalunya.

El treball dut a terme ha de contribuir a continuar avançant en la millora de la qualitat del sistema educatiu del nostre país, en l'actualització professional dels nostres docents i, en definitiva, en la millora de l'èxit educatiu del nostre alumnat.

Irene Rigau i Oliver

Consellera d'Ensenyament

Introducció

El Departament d'Ensenyament ha elaborat aquest document que desplega i concreta el currículum vigent de matemàtiques de l'educació secundària obligatòria. Incorpora les competències matemàtiques específiques de l'etapa, graduades en tres nivells de consecució i posa en evidència les relacions entre les competències i els processos i continguts clau del currículum.

Els elements que componen el document són: les dimensions, les competències amb les seves gradacions respectives, els continguts clau de cada competència, les orientacions metodològiques i orientacions per a l'avaluació de cada competència.

La competència matemàtica, tal com es defineix al currículum, inclou una gran varietat d'habilitats i coneixements, de manera que resulta més aclaridor parlar d'un gran camp competencial matemàtic dins del qual establir una sèrie de competències amb perfils més definits. El currículum ja dona els criteris per dibuixar aquests perfils quan, més enllà dels blocs de continguts tradicionals (numeració i càlcul; canvi i relacions; espai i forma; mesura; estadística i atzar), explicita quins són els processos que es desenvolupen al llarg de tot treball matemàtic. En l'elaboració de la proposta de competències matemàtiques de l'ESO s'ha optat per quatre dimensions que es corresponen amb els processos del currículum: resolució de problemes; raonament i prova; connexions; i comunicació i representació.

Aquestes dimensions tenen elements comuns i això es tradueix en relacions entre les competències. En la resolució de problemes hi ha components de comunicació i representació (*comunicació del procés de resolució i de la solució, traducció de l'enunciat al llenguatge matemàtic*), de connexions (*entre matemàtiques i realitat, entre conceptes i algorismes*) i de raonament i prova (*en la comprovació de solucions i del procés de resolució*). La dimensió de raonament i prova, a més de la resolució de problemes, té components de comunicació i representació (*en la presentació d'argumentacions, en l'expressió clara i precisa de les idees matemàtiques, en la construcció de coneixement*). També hi ha relacions entre connexió i comunicació i representació (*identificació de les matemàtiques en situacions reals i l'ús d'eines tecnològiques*). (Vegeu l'annex 2)

Les competències, que concreten les dimensions, s'han de considerar totalment integrades en els continguts del currículum. Encara que tots els continguts estan relacionats amb totes les competències, s'ha fet una tria d'aquells que contribueixen en major mesura al desenvolupament de cada competència. Són els anomenats continguts clau de la competència. En l'annex 1 es troba el quadre complet de relació entre els continguts clau i les competències.

Els continguts clau s'interrelacionen. La mesura geomètrica i les transformacions geomètriques, la proporcionalitat i les relacions mètriques posen en relació els nombres i la geometria. L'obtenció, representació i interpretació de dades estadístiques i la seva anàlisi posen en relació nombres i estadística. Finalment, els patrons, les funcions, el canvi i les taules i gràfics són comuns a tots els blocs (vegeu l'annex 3). Els continguts clau han estat trets del currículum. La llista completa es troba en l'annex 4.

Cada competència s'ha graduat en tres nivells de consecució: satisfactori (nivell 1), notable (nivell 2) i excel·lent (nivell 3), que van des de l'assoliment fins a l'excel·lència en la competència i tenint en compte que cada nivell porta implícit l'assoliment de l'anterior. Els criteris usats per fer la gradació estan relacionats amb la complexitat de les eines i estratègies matemàtiques emprades, així com amb els nivells d'abstracció del llenguatge i les representacions i el grau de consciència per part de l'alumne de les matemàtiques emprades. (Vegeu la taula completa a l'annex 5)

El tres nivells positius d'adquisició s'exemplifiquen en els indicadors d'avaluació i en els exemples d'activitats d'avaluació final que es troben en cadascuna de les competències.

L'adquisició de les competències matemàtiques demana maneres de treballar que en potenciïn el seu desenvolupament. Encara que cada competència va acompanyada d'orientacions metodològiques específiques, a continuació s'esmenten algunes consideracions d'aplicació general.

El professor ha de provocar curiositat i proposar reptes i donar prou temps per investigar i reflexionar. Ha d'encoratjar l'alumne a construir els seus aprenentatges i ajudar-lo a prendre consciència del seu progrés. Això s'ha de fer en un ambient de classe que afavoreixi l'intercanvi d'idees i que animi a la reflexió, on l'alumnat no tingui por d'arriscar-se a fer propostes i exposar la seva manera de pensar. L'acceptació que tothom pot fer contribucions interessants, el respecte a les intervencions dels altres i saber-ne treure coneixement ajudarà a crear una cultura de classe més basada en la interrogació que en la cerca de respostes immediates.

Tot plegat contribuirà al fet que l'alumne desenvolupi actituds com el plaer de comprendre les matemàtiques, de considerar-les una construcció personal i d'aplicar-les en la seva vida quotidiana. Considerar els errors com a font d'informació, les situacions problemàtiques com a reptes engrescadors i el llenguatge matemàtic com una eina potent de comunicació són aspectes actitudinals de les matemàtiques estretament teixits amb les competències proposades.

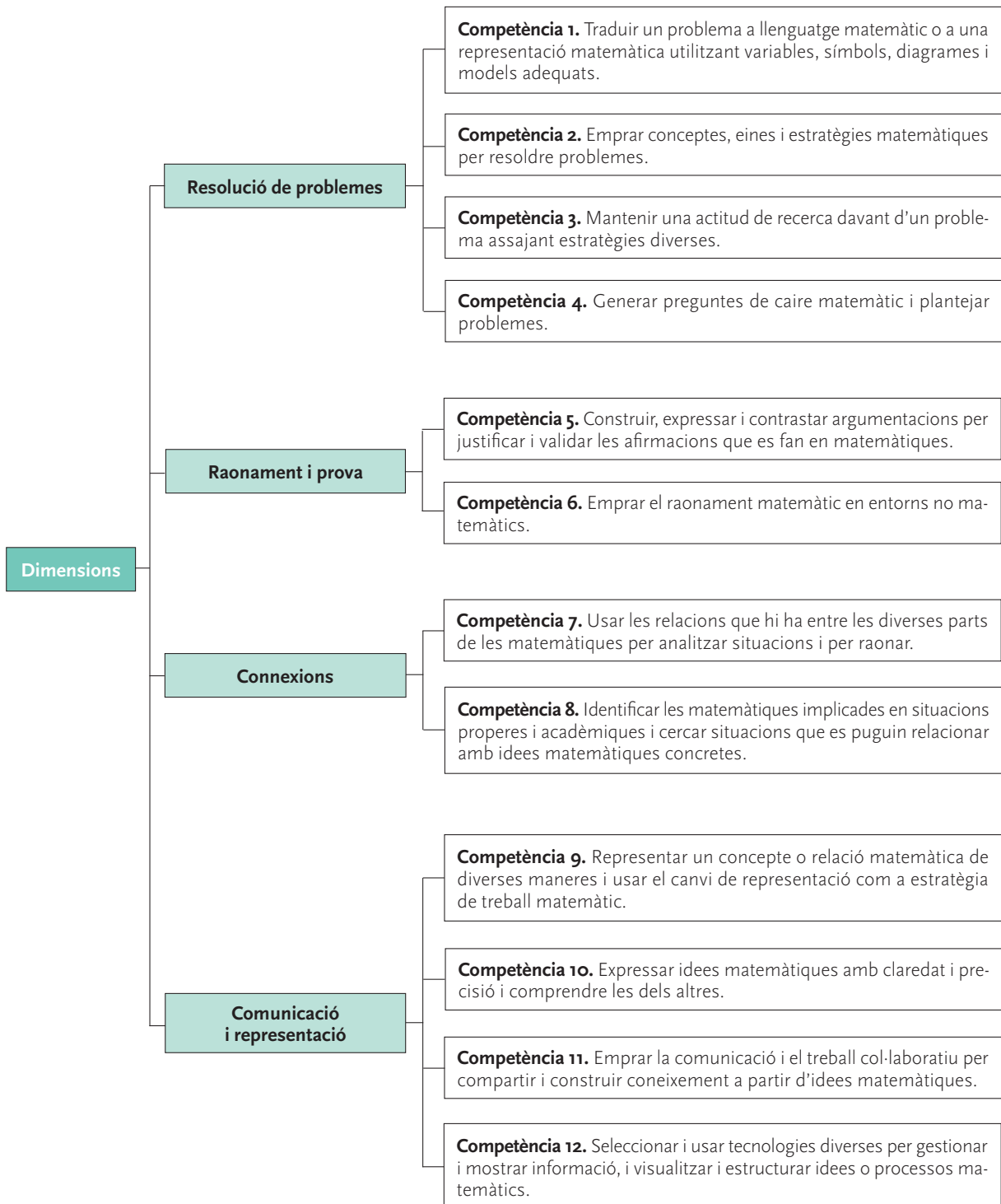
Els contextos propers a l'alumnat, les altres àrees de coneixement i, naturalment, les mateixes matemàtiques han de ser el suport de l'activitat matemàtica. Els contextos adients per treballar els diversos temes del currículum permeten descobrir, i alhora aplicar, matemàtiques. Pel que fa als processos i als continguts clau, cal fer-ne un plantejament completament integrat. Aspectes concrets de com es poden fer aquests lligams es donen en les orientacions metodològiques de cada competència.

També és molt important el paper dels recursos, com els materials manipulatius, visuals i TIC, ja que afavoreixen l'experimentació, el raonament i la comprensió. En la web del Creamat (<http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/>) es poden trobar exemples d'activitats (a l'ARC) i recursos per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques.

L'avaluació ha de formar part del procés d'ensenyament, tant durant el seu transcurs com en la comprovació dels aprenentatges assolits. Les activitats d'avaluació final de la competència han de ser prou riques perquè l'alumne pugui mostrar tot el que sap. Han de tenir més d'una solució, han de poder ser resoltes de diverses maneres, han de fer possible que l'alumne prengui decisions i apliqui connexions i han de demanar justificacions dels processos i les solucions. La caracterització de les activitats d'avaluació final i els exemples que es donen en cada competència orienten sobre la proposta d'activitats i sobre la seva valoració, atenent als tres nivells d'adquisició de la competència.

L'observació dels comportaments de l'alumne durant tota l'etapa donarà informació que permetrà adaptar la planificació de les activitats a la realitat de l'alumnat. Els indicadors que s'ofereixen en cada competència poden ser útils per a aquest objectiu.

Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic



Dimensió resolució de problemes

La resolució de problemes és una de les activitats més genuïnes del quefer matemàtic. S'hi posen en joc i prenen significat pràcticament tots els aspectes treballats en l'educació matemàtica. Un problema és una proposta d'enfrontament amb una situació desconeguda que es planteja a través d'un conjunt de dades dins d'un context, per a la qual, en principi, no es disposa d'una resposta immediata i que requereix reflexionar, prendre decisions i dissenyar estratègies. Cal distingir bé entre un problema i un exercici. Aquesta és una tasca que pot portar-se a terme mitjançant la simple aplicació de tècniques, algorismes o rutines més o menys automatitzades. Un problema sempre convida a la recerca i, en la seva resolució, hi ha una espurna de descobriment que permet experimentar l'encant d'assolir la solució.

La resolució de problemes no és una tasca per realitzar al final d'un trajecte d'aprenentatge sinó que pot ser el desencadenant del procés. No tan sols cal ensenyar matemàtiques per resoldre problemes, sinó també ensenyar matemàtiques a partir i a través de la resolució de problemes. Una metodologia centrada en la resolució de problemes dona l'oportunitat de desvetllar en l'alumnat el gust per enfrontar-se a un repte, lluitar-hi de manera tenaç, experimentar, cercar ajut adequat, si cal, assaborir l'èxit i adquirir confiança en les pròpies capacitats. Aquestes arriben a la seva culminació quan l'alumne és capaç de generar els seus propis problemes matemàtics a partir de la realitat que l'envolta.

En el procés de resolució d'un problema hi ha diverses etapes:

- Entendre bé el que el problema demana, les dades que aporta i el context on es planteja. En això pot ajudar fer un dibuix, un gràfic, una taula, un esquema...
- Experimentar, estimar, temptejar, conjeturar... recordant problemes semblants que puguin resultar més familiars i idees matemàtiques que puguin ser útils.
- Planificar estratègies de resolució, aplicant conceptes i eines matemàtiques per desenvolupar aquestes estratègies.
- Controlar de manera continuada la correcció del procés que se segueix.
- Comprovar la correcció de la solució respecte al plantejament matemàtic i la seva raonabilitat en el context.
- Comunicar adequadament el resultat i el procés seguit.
- Prendre consciència del procés seguit i incorporar-lo al bagatge d'estratègies resolutives.

A vegades aquestes etapes no es desenvolupen de manera successiva, ja que sovint es pot anar enrere, fer replantejaments, reconsiderar decisions preses, corregir estratègies...

Aquesta dimensió està integrada per quatre competències:

- **Competència 1.** Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.
- **Competència 2.** Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.
- **Competència 3.** Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.
- **Competència 4.** Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.

COMPETÈNCIA 1

Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats

Explicació

Aquest primer pas en la resolució d'un problema comporta:

- La comprensió del problema assumint el contingut, simplificant el que calgui i determinant la informació que aporta i la que demana.
- La identificació dels aspectes matemàtics que conté.
- El reconeixement d'estructures matemàtiques que s'hi adaptin, com ara regularitats o relacions de tipus aritmètic, geomètric o funcional.
- L'elecció de maneres de representació eficients.

El procés de traducció ha de desembocar en l'obtenció d'un model matemàtic que pot incloure expressions en llenguatge matemàtic, però també representacions matemàtiques com gràfics, esquemes, figures geomètriques... El ple assoliment d'aquesta competència implica que s'entengui bé, al llarg de tot el procés de resolució, la relació entre el model construït i el context al qual s'aplica.

Si la traducció a llenguatge matemàtic s'ha realitzat amb cura i s'ha entès bé, si la formulació matemàtica obtinguda té un sentit clar per a l'alumnat, serà molt més fàcil assegurar que el procés de resolució sigui significatiu i que el resultat obtingut s'interpreti correctament en el context propi del problema.

Entre els continguts que són clau per a l'assoliment d'aquesta competència cal assenyalar els que fan referència al sentit del nombre i de les operacions, al llenguatge i el càlcul algebraic, als patrons, les relacions i les funcions, al sentit espacial i la representació de figures tridimensionals, a la comprensió de les magnituds i de la mesura, al sentit de l'estadística i al sentit i la mesura de la probabilitat.

La gradació dels nivells d'assoliment de la competència té en compte tant el format de l'enunciat del problema com el resultat de la traducció a llenguatge matemàtic.

Gradació

- 1.1.** Explicar l'enunciat d'un problema en llenguatge propi, valent-se de textos, dibuixos, esquemes o expressions aritmètiques.
- 1.2.** Traduir un problema a llenguatge matemàtic utilitzant gràfics, expressions aritmètiques o expressions algebraiques senzilles.
- 1.3.** Traduir i donar sentit a problemes formulats de maneres diverses (textos, imatges, objectes...) al llenguatge matemàtic, tenint en compte el significat de les dades.

Continguts clau

- Sentit del nombre i de les operacions.
- Llenguatge i càlcul algebraic.
- Patrons, relacions i funcions.
- Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.
- Magnituds i mesura.
- Sentit de l'estadística.
- Sentit i mesura de la probabilitat.

Orientacions metodològiques

La traducció d'un problema a llenguatge matemàtic és el primer pas per a la seva resolució. Una persona experta, davant d'un problema de tipus conegut, realitza aquesta traducció de manera quasi automàtica i simultània a la pròpia lectura de l'enunciat. En canvi, si s'enfronta a un problema del tot desconegut observarà que la traducció a llenguatge matemàtic és una de les tasques més delicades i difícils del procés resolutiu. És important que el professor sigui conscient de la dificultat que, per a l'alumnat, pot representar aquest pas i que hi dediqui temps i atenció evitant de passar, de manera prematura, a l'aplicació de tècniques a partir d'una formulació matemàtica el sentit de la qual, a vegades, no és prou comprès.

La construcció del pont entre el territori de l'enunciat i el territori del llenguatge matemàtic es fa des dels dos costats:

- Des d'una comprensió clara del que el problema explica i demana. Això no és immediat, requereix temps, i es pot treballar a classe a través de la lectura comprensiva, de l'explicació mútua o conjunta del que s'ha entès, de la conversa entorn a l'enunciat, de la realització de dibuixos i esquemes que després es posin en comú...
- Des de l'aplicació de conceptes i eines matemàtiques que permetin construir una adequada formulació matemàtica del problema. És recomanable que el professor plantegi a l'alumne la necessitat de cercar, en el seu bagatge de coneixements matemàtics, idees que li puguin ser útils en la traducció del problema, fent-se preguntes com: què em suggereix l'enunciat? Què en sé? Hem fet problemes semblants anteriorment? Hi veig alguna relació amb alguna idea matemàtica?

Per tal de contribuir a desenvolupar aquesta competència, entre altres activitats, serà bo que el professor convidi l'alumnat a traduir petits textos a una expressió aritmètica simple ("En Joan té tres pomes i la seva mare li'n dóna el doble de les que té"), a una expressió algebraica ("Malgrat que la Maria s'ha gastat la tercera part dels euros que tenia, encara li'n queden cinc"), a un dibuix o un esquema ("Un far està dalt d'un penya-segat i el veiem des d'un barquet..."). En una primera etapa, aquests textos no tenen per què expressar condicions ni acabar formulant necessàriament una pregunta. I al revés, a partir d'una expressió aritmètica o algebraica, d'un gràfic, d'un dibuix o un esquema serà bo inventar-se i comentar conjuntament petits relats que descriuïn situacions que puguin correspondre al model matemàtic proposat. Així mateix serà interessant plantejar problemes no només a través d'enunciats textuais, sinó també a partir d'objectes, d'imatges, de l'entorn (des de mesurar l'altura de l'arbre que hi ha al pati del centre fins a construir un gràfic de temperatures al llarg del dia)...

Naturalment cal establir una adequada progressivitat en la dificultat de les activitats atenent tant el punt de partida, l'enunciat del problema (complexitat del text, proximitat del context descrit a l'experiència de l'alumnat, diferents formats de plantejament...) com el punt d'arribada, la formulació matemàtica (dibuixos i esquemes, expressions aritmètiques, expressions algebraiques, representacions geomètriques, gràfics funcionals, taules, diagrames estadístics...).

Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència, cal proposar problemes on no s'explicitin les relacions entre les dades en llenguatge matemàtic. Tant poden ser problemes geomètrics com els que impliquin expressions algebraïques.

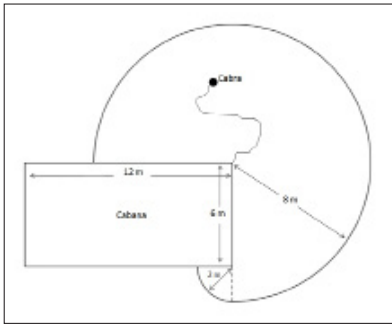
Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
<p>Entén el significat del vocabulari, les expressions, les quantitats i les unitats de mesura que apareixen en l'enunciat.</p> <p>Explica l'enunciat del problema amb les seves pròpies paraules, identificant la informació que s'aporta i el que es demana.</p> <p>Elabora textos, dibuixos, esquemes que descriuen la situació que el problema planteja.</p> <p>Construeix expressions aritmètiques o representacions geomètriques simples que corresponen a l'enunciat del problema.</p> <p>(...)</p>	<p>Selecciona el més rellevant de la informació que l'enunciat aporta.</p> <p>Identifica els aspectes matemàtics implicats en el problema.</p> <p>Escull el model més adient per descriure, en llenguatge matemàtic o a través d'una representació matemàtica, el que el problema planteja.</p> <p>Si és el cas, construeix expressions algebraïques que corresponguin fidelment a l'enunciat del problema.</p> <p>Si és el cas, fa representacions geomètriques precises de la situació que es descriu a l'enunciat.</p> <p>Si és el cas, elabora gràfics funcionals o estadístics que representin la informació que dóna l'enunciat.</p> <p>(...)</p>	<p>Construeix representacions matemàtiques de problemes formulats no tan sols a través d'un enunciat textual, sinó també a partir d'un material, d'una situació propera, d'una imatge...</p> <p>Al llarg de la resolució, té present el significat que tenen, en el context de l'enunciat, els objectes matemàtics que s'hi manegen (quantitats, variables, figures...).</p> <p>Construeix representacions matemàtiques de problemes d'enunciat obert en què calgui fer suposicions i prendre decisions d'interpretació.</p> <p>(...)</p>

A continuació s'ofereix un exemple d'activitat d'avaluació de la competència:

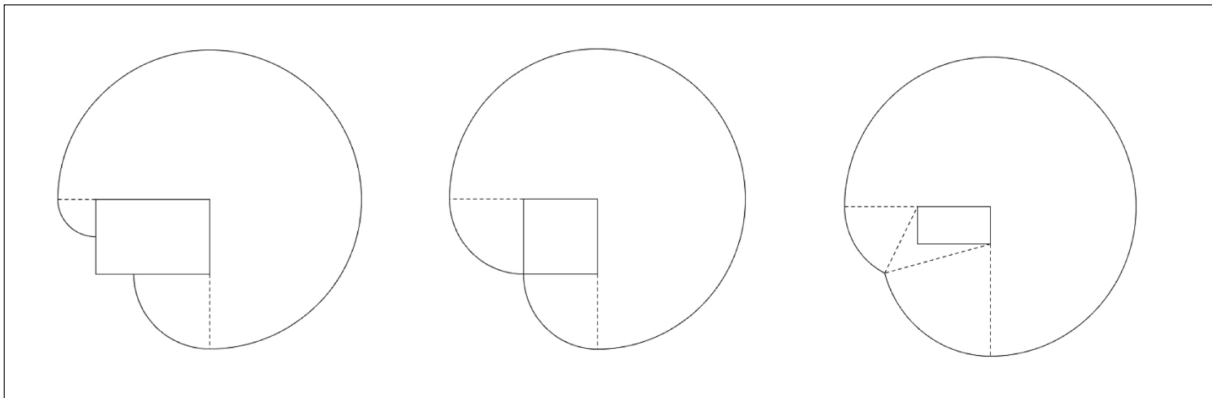
En el bell mig d'un gran prat hi ha una cabana rectangular que fa dotze metres de llarg per sis metres d'ample. En una de les cantonades de la cabana hi ha una cabra lligada amb una corda de vuit metres de longitud. Si cada metre quadrat del prat té sis-cents grams d'herba, quants quilograms d'herba podrà menjar la cabra? Donaria el mateix resultat si la cabana fes quinze metres de llargada? Creus que són importants les dimensions de la cabana per respondre a la pregunta que planteja el problema? Per què?

L'alumne que entén l'enunciat en línies generals, sense mostrar dificultats amb el vocabulari ni les expressions emprades, que comprèn el significat de les dimensions de la cabana i de la corda i el sentit de la quantitat d'herba per metre quadrat i que és capaç d'expressar-ho correctament amb les seves pròpies paraules però fa tan sols un croquis imprecís de la situació descrita, posa de manifest un nivell 1 d'adquisició de la competència.



La resposta de l'alumne mostrarà un nivell 2 pel que fa a l'adquisició d'aquesta competència si és capaç de fer una representació precisa (a escala i emprant regla i compàs o eines tecnològiques) de la situació descrita en el problema, adonant-se de l'existència de dues zones corresponents respectivament a tres quartes parts d'un cercle i a una quarta part d'un altre cercle, d'explicar-ho acuradament, de formular una expressió aritmètica correcta per tal de calcular l'àrea total de la zona a la qual té accés la cabra i de tenir present que el problema demana un pas més, el càlcul de la quantitat d'herba d'aquesta zona.

La resposta de l'alumne se situarà en el nivell 3 pel que fa a l'adquisició d'aquesta competència si, al llarg de la resolució, té en compte el sentit de les quantitats parcials que calcula, fa una gestió acurada del nombre de xifres decimals i utilitza unitats de mesura adequades (metres, metres quadrats, grams i quilograms), si interpreta correctament el resultat final obtingut i si mostra la capacitat de traduir a una representació geomètrica adequada els diversos casos que es plantegen en les dues últimes preguntes del problema que tenen un caràcter més qualitatiu i obert. En funció de les dimensions de la cabana la situació descrita pel problema es traduirà en representacions geomètriques diverses com les següents:



COMPETÈNCIA 2

Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes

Explicació

Aquesta competència, central en la resolució de problemes, fa referència a la capacitat d'aplicar tot el bagatge de coneixements matemàtics de què disposa l'alumne amb l'objectiu de resoldre problemes prèviament formulats matemàticament. És una competència que requereix:

- Emprar amb agilitat continguts matemàtics adequats. Alguns continguts especialment rellevants en la resolució de problemes són el raonament proporcional, el càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora), el llenguatge i càlcul algebraic, la representació de funcions (gràfics, taules i fórmules), les magnituds i la mesura, les relacions mètriques i el càlcul de mesures en figures, els mètodes estadístics d'anàlisi de dades...
- Posar en joc estratègies resolutives a partir d'experiències prèvies en resolució de problemes però adaptant-les al cas plantejat i ajustant-les progressivament en un procés, sovint cíclic, d'assaig i millora, de replantejament, de revisió de decisions preses...
- Mantenir el sentit del context en què el problema està plantejat, no oblidar que els models matemàtics que s'utilitzen representen la realitat que el problema descriu.

La gradació de la competència respon a tres criteris: l'increment progressiu de la complexitat de les eines i estratègies matemàtiques que es posen en joc, la millora de la capacitat per explicar, justificar, contrastar i, si és el cas, modificar el procés resolutiu, i l'augment gradual de la capacitat per comprovar la correcció i raonabilitat de la solució obtinguda.

Gradació

- 2.1.** Emprar estratègies i eines matemàtiques elementals per resoldre problemes.
- 2.2.** Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes, explicant el procés i comprovant la raonabilitat de la solució.
- 2.3.** Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes, mantenint el control del procés, justificant-lo i comprovant la correcció i raonabilitat de la solució.

Continguts clau

- Raonament proporcional.
- Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).
- Llenguatge i càlcul algebraic.
- Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.
- Magnituds i mesura.
- Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.
- Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.

Orientacions metodològiques

Un cop un problema contextualitzat s'ha formulat en termes matemàtics, cal que l'alumne tingui la capacitat d'aplicar tot l'instrumental de què disposa per tal de resoldre'l. Aquesta capacitat és tan fonamental en el procés de resolució com complexa per la varietat de coneixements i habilitats que posa en joc. No tan sols cal conèixer els conceptes i les eines matemàtiques, sinó també saber escollir les necessàries en cada cas i encadenar-les adequadament, alineant-les en un fil estratègic conjunt. En el procés de resolució d'un problema influeixen molts factors: el que l'alumne sap, les seves creences entorn a la resolució de problemes i allò que sent quan s'enfronta a un problema. La resolució de problemes requereix serenor i temps per crear, per intuir, per anar construint les idees, per emprar eines tecnològiques... Cal que el professor motivi i acompanyi aquest camí mantenint-se en una posició atenta i, alhora, discreta. La seva acció pot veure's afavorida per algunes recomanacions metodològiques:

- És important individualitzar el problema evitant que sigui simplement un més dins d'un llistat indefinit d'enunciats. És bo que l'alumne visqui la seva resolució com una experiència personal o col·laborativa important, que mereix esforç, que ensenya coses i que pot aportar la satisfacció del repte.
- La resolució d'un problema pot anar més enllà de la classe o madurar-se al llarg de diverses sessions. Cal temps perquè l'alumnat faci realment problemes a classe, més enllà d'aplicar fórmules o adoptar una posició d'espectador que comprèn més o menys el que s'hi fa.
- En la resolució de problemes convé alternar treball individual, treball en grup i discussió conjunta tot respectant els estils personals i els temps de cada alumne a l'hora d'enfrontar-s'hi.
- Més enllà dels exercicis sovint es plantegen molts problemes que semblen dissenyats (i de fet ho estan) per aplicar una determinada relació o una propietat concreta. Aquest tipus de preparació també és necessària però convé no oblidar la importància de fer créixer progressivament el grau d'obertura dels problemes que es plantegin a l'alumnat, tot disminuint la simplicitat del context, augmentant el nombre d'eines i relacions matemàtiques que cal emprar, donant majors possibilitats d'elecció on calgui prendre decisions raonades per escollir entre camins cada cop menys pautats...
- En el conjunt d'activitats de resolució de problemes s'hauria de procurar transmetre la idea que un problema pot resoldre's de diverses maneres i que no sempre té una única solució, que a vegades hi ha diverses solucions o no n'hi ha cap. Serà interessant convidar a cada alumne a explicar el seu enfocament i crear converses que ajudin a configurar camins i fer estimacions de resultats.
- Convé que el professor posi especial atenció a fer emergir de manera clara les estratègies emprades per afrontar la resolució de problemes, i aconseguir que l'alumnat les vagi incorporant al seu bagatge d'habilitats. Entre aquestes estratègies es poden assenyalar les següents: experimentar amb el problema, temptejar, fer assaig i millora, estudiar casos particulars, resoldre situacions més senzilles que les que el problema planteja, imaginar-se el problema resolt, dividir el problema en parts i començar per les que l'alumne consideri més fàcils o li ofereixin més seguretat, fer-se preguntes intermèdies, comparar amb problemes similars ja resolts, fer esquemes, dibuixos, gràfics o taules que ajudin a organitzar i manejar la informació, explicitar la planificació i procedir a realitzar-la de manera sistemàtica...
- Cal una cura especial en el tipus d'ajudes que es donen a l'alumnat en la resolució d'un problema, posant falques adequades en el moment adequat, fent preguntes adients per desbloquejar situacions o redreçar estratègies, dosificant el grau d'intervenció i assegurant que sigui realment l'alumne qui progressi cap a la solució.
- Convé educar un control intern del procés resolutori que permeti a l'alumne tenir constantment present la panoràmica global de l'estratègia emprada i valorar els riscos, incerteses i punts crítics del camí seguit. Cal conrear una certa disposició a la revisió del procés, a l'avaluació d'alternatives, a la comprovació de resultats parcials i a la valoració de la correcció i de la raonabilitat del resultat final.

- La diversitat de maneres d'abordar un problema pot fer aconsellable l'ús de models materials o d'eines tecnològiques (programes de geometria dinàmica, fulls de càlcul, paquets estadístics...) que permetin a l'alumnat experimentar, fer construccions o simulacions i realitzar descobertes empíriques.
- En finalitzar la resolució és bo convidar l'alumne a fer una reflexió final sobre el procés seguit, verbalitzar el que ha fet, els dubtes que li han sorgit, els encerts i els desencerts que ha tingut...

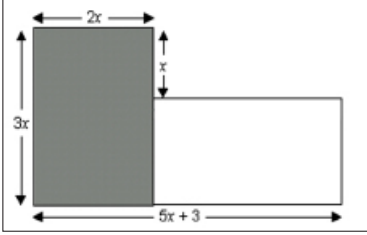
Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència cal proposar problemes de diverses etapes, de solució múltiple i que es puguin resoldre de diverses maneres. També han d'incloure la transformació d'expressions algebraiques, de figures geomètriques, que calgui aplicar relacions mètriques o plantegin situacions de canvi.

Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
<p>Transforma amb habilitat expressions aritmètiques i calcula correctament.</p> <p>Utilitza símbols i els relaciona a través d'expressions algebraiques simples en les quals pot fer petites transformacions.</p> <p>Interpreta representacions geomètriques i gràfics funcionals i estadístics senzills.</p> <p>Explora, tempteja, assaja procediments resolutius i implementa progressives millores per arribar a la solució.</p> <p>Desenvolupa processos de resolució curts que manegin un nombre limitat de conceptes i eines matemàtiques.</p> <p>(...)</p>	<p>Mostra habilitat en el càlcul algebraic transformant amb agilitat i seguretat les expressions simbòliques.</p> <p>Utilitza relacions mètriques i representacions geomètriques i és capaç de fer construccions geomètriques emprant eines tecnològiques.</p> <p>Interpreta gràfics funcionals i estadístics en contextos diversos i és capaç de generar-ne emprant, si cal, eines tecnològiques adients.</p> <p>Explora el problema de manera sistemàtica fins a establir, encara que sigui implícitament, una estratègia de resolució.</p> <p>Selecciona les eines matemàtiques adequades per desenvolupar l'estratègia.</p> <p>Reubica el resultat obtingut en el context que descriu el problema i jutja si té sentit.</p> <p>Explica el procés de resolució amb paraules pròpies, de manera correcta i entenedora.</p> <p>(...)</p>	<p>Planifica explícitament l'estratègia de resolució.</p> <p>Executa el pla mantenint el control del procés, reajustant-lo si cal, fins a obtenir una solució de la qual és capaç de comprovar la correcció.</p> <p>Explica i justifica clarament el procés seguit i la raonabilitat de la solució en el context del problema.</p> <p>Mostra capacitat crítica davant de l'estratègia emprada tot explorant possibles millores.</p> <p>Recull idees alternatives expressades per altres persones, les avalua, les matisa si cal i les incorpora, en el grau que consideri adequat, per enriquir o rectificar la seva estratègia.</p> <p>(...)</p>

A continuació es presenta un exemple d'activitat d'avaluació:



L'empresa de jardineria TotVerd ofereix el servei de manteniment de jardins (gespa, poda, neteja...) a un preu fix anual de 10 € per cada metre quadrat de jardí. Aquesta empresa està interessada a treballar per als veïns d'una urbanització on totes les parcel·les tenen la forma representada en la figura adjunta, en la qual la zona ombrejada està ocupada per la casa i la zona clara és de jardí.

Les mesures que apareixen en el plànol, que no està a escala, s'indiquen a partir d'una longitud desconeguda x que pot variar segons la parcel·la sigui més gran o més petita. De fet en la urbanització hi ha tres mides de parcel·les, sempre amb la mateixa forma: en les més petites la casa ocupa una superfície de 96 m², en les mitjanes la casa ocupa una superfície de 150 m² i en les més grans la casa ocupa una superfície de 216 m². Per tal de preparar el pressupost, podríeu fer una petita taula que relacionés, en aquests tres casos, la superfície ocupada per la casa, la superfície ocupada pel jardí i el preu del manteniment? Podríeu trobar, de manera raonada, una expressió general per al manteniment del jardí d'una parcel·la amb aquesta forma que ocupi S m² de superfície?

L'alumne que prova diferents valors per a la x tot explorant si corresponen a alguna de les superfícies de la casa que es dona en l'enunciat i, en aquests casos, calcula la superfície del jardí i el cost del manteniment i ho resumeix en una taula però no sap explicar un procediment que li permetés deduir-ho de manera directa a partir de l'àrea de la casa mostraria un nivell 1 d'adquisició de la competència.

Un alumne, la resposta del qual manifestés un nivell 2 pel que fa a l'adquisició d'aquesta competència, seria capaç d'establir, realitzar i explicar processos de deducció a partir de la superfície de la casa, emprant llenguatge algebraic, relacions mètriques i raonament proporcional. També seria capaç de fer una gestió adequada de les unitats (m² i €) que demostra que els nombres obtinguts tenen sentit per a ell en el context del problema, de descriure el procés realitzat i de valorar la raonabilitat dels resultats obtinguts, resumint-los en una taula.

La resposta d'un alumne se situarà en el nivell 3 pel que fa a l'adquisició d'aquesta competència si mostra capacitat per explicar, de manera clara i justificada, l'estratègia seguida en els casos particulars, si sap trobar una expressió general per al cost del manteniment (que pot emprar en el marc d'un full de càlcul per obtenir taules generals) i si cerca maneres de millorar la seva estratègia valorant i acollint, si fos el cas, idees alternatives aportades per altres persones.

COMPETÈNCIA 3

Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses

Explicació

Aquesta competència està directament relacionada amb la competència bàsica *Autonomia i iniciativa personal*, ja que té un component essencial d'autogestió del coneixement combinat amb la confiança en les pròpies possibilitats. Però per assolir-la no n'hi ha prou amb mantenir l'actitud de no rendir-se davant dels obstacles i de practicar un treball metòdic, cal ser conscient que sempre hi ha diversos mètodes correctes de resolució dels problemes, que el camí cap a la solució no és únic, i que la majoria de situacions en què ens trobem en la vida permeten una gran diversitat d'abordatges. L'alumnat ha de treballar de forma activa diferents tipus de problemes matemàtics amb diferents enfocaments, propis o aliens.

La diversitat d'estratègies experimentades, unida a l'assumpció de l'error com a oportunitat de millora, permetrà l'alumnat sentir-se més segur en la seva relació amb les matemàtiques. Aquesta seguretat redundarà en una actitud més participativa i en l'afermament de l'autoconfiança que, com es deia al principi, està en el nucli d'aquesta competència.

Entre els continguts clau per a l'assoliment d'aquesta competència cal remarcar els que fan referència al càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora), als patrons, les relacions i les funcions, a l'anàlisi del canvi, als diversos tipus de funcions, al sentit espacial i la representació de figures tridimensionals, a les relacions i transformacions geomètriques i als mètodes estadístics d'anàlisi de dades.

En aquesta competència s'ha considerat imprescindible mantenir una actitud de recerca davant d'un problema, sense la qual no es considerarà en cap cas assolida la competència.

Els diferents nivells de la gradació atenen a la riquesa en la gestió de la cerca d'alternatives: des de la simple prova d'una via diferent passant per la discussió de vies alternatives amb els companys fins a l'ajust refinat de les estratègies per la via de la interacció amb els companys.

Gradació

- 3.1.** Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema, provant altres propostes si la inicial no funciona.
- 3.2.** Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema, ser capaç d'assajar i discutir altres propostes en un entorn tant d'aprenentatge cooperatiu com individual.
- 3.3.** Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema, redefinir i ajustar, si cal, les estratègies i ser capaç de discutir i valorar altres propostes, en qualsevol entorn d'aprenentatge.

Continguts clau

- Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).
- Patrons, relacions i funcions.
- Anàlisi del canvi i tipus de funcions.
- Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.
- Relacions i transformacions geomètriques.
- Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.

Orientacions metodològiques

Dins el grup de competències associades a la resolució de problemes, les dues primeres s'ocupen dels passos primaris de la resolució: el plantejament i el procés de resolució. En canvi aquesta tercera competència té un component menys directament relacionat amb destreses i més associat a valors i actituds personals.

Cal estimular l'actitud d'exploració de l'alumnat amb una acció directa del professorat però també dotant l'alumnat d'instruments per a assajar alternatives, ja que amb una actitud positiva però sense les eines matemàtiques necessàries, l'alumnat no podrà anar gaire lluny. En conseqüència, l'acció del professorat haurà de mantenir l'equilibri entre aquests dos fronts.

El professor pot induir la diversificació d'estratègies en el treball de l'alumnat amb decisions com ara:

- Diversificar no només els camps de treball dels problemes (que han de cobrir la varietat de continguts curriculars), sinó també el format de les propostes de problema: enunciats textuals, esquemes gràfics, preguntes obertes, relats en què van sorgint preguntes...
- Posar restriccions en les condicions del problema, de manera que es dificulti un determinat tipus d'enfocament i se n'afavoreixi un altre.
- Proposar dinàmiques de treball que fins i tot poden tenir un caràcter de repte lúdic: concursos de resolució de problemes en què el grup valora la resolució més elegant o més creativa, demanar a un alumne que agafi el plantejament d'un company i continuï el procés de resolució fins al resultat final, recollir diverses solucions d'un mateix problema i proposar la discussió en grup de la seva validesa...

A banda del seu paper inicial proposant situacions, el professor ha d'observar el procés que segueix l'alumne per valorar-lo i intervenir si és necessari:

- Donant elements per a l'anàlisi dels errors, una situació especialment delicada pel sentiment de frustració que pot generar.
- Demanant un aprofundiment un cop s'ha resolt el problema: estudi del rang de solucions, continuacions del problema amb noves preguntes, possibles generalitzacions, validesa de les solucions si es modifica algun element del context...
- Forçant les alternatives si l'alumne ja ha mostrat domini en una estratègia. Un cop l'alumnat ha resolt un problema amb mètodes propis, proposar-li l'inici d'un altre camí de resolució.
- Acceptant les idees inesperades de l'alumnat, encara que s'allunyin del guió preestablert ideat pel professor, si realment aporten un punt de vista productiu per a la resolució del problema, i utilitzant-les per fer una descoberta conjunta. És molt enriquidor que l'alumnat s'adoni que el professor no coneix totes les solucions per endavant i que en qualsevol situació poden aparèixer oportunitats d'exploració.
- Felicitant pels èxits, petits o grans, encoratjant les bones línies de treball, valorant la creativitat, relativitzant els fracassos si d'ells es poden extreure camins de resolució.

Atès el fort component personal que té aquesta competència, en què es desenvolupen actituds de perseverança, autoestima, creativitat i autocrítica, el paper del professor també ha de tenir molt en compte el vessant emocional. Les seves intervencions no han de ser invasives i han de ser dosificades, sense cremar etapes precipitadament, de manera que l'alumnat tingui espai per desenvolupar les pròpies idees.

El treball en grup, sigui petit o gran, és molt important per al desenvolupament d'aquesta competència. D'una banda perquè és molt més natural que les alternatives de plantejament o de resolució de problemes sorgeixin del contrast entre idees i maneres de fer d'un col·lectiu que no pas de la reflexió solitària d'un alumne. D'altra banda perquè el treball entre iguals facilita una gestió més fluïda de les emocions i un intercanvi més obert d'idees. Un entorn de treball col·laboratiu és un camp fèrtil per a la discussió i la valoració de propostes alternatives a les pròpies.

Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència es poden proposar problemes fets on calgui detectar errors de plantejament, es poden demanar diverses resolucions d'un mateix problema, proposar problemes oberts on s'hagin de considerar possibles restriccions i, per tant, diverses maneres d'enfocar-lo.

Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
Executa correctament processos de resolució curts en situacions treballades anteriorment. Revisa el procediment seguit i localitza errors. Quan localitza errors, rectifica el procediment seguit. (...)	Executa correctament processos de resolució en situacions diverses. Analitza críticament el procediment de resolució seguit. Assaja procediments de resolució diferents del seguit inicialment. Explica el procés de resolució als companys amb paraules pròpies, de manera correcta i entenedora i defensa raonadament el seu punt de vista davant les altres propostes. Escolta les alternatives proposades per altres companys i és capaç de seguir-les fins arribar a una resolució. (...)	Davant d'un problema, és capaç d'utilitzar més d'una manera d'enfrontar-lo. Analitza críticament el procediment de resolució seguit i intenta millorar-lo. Explica el procés de resolució als companys amb paraules pròpies i adapta l'explicació al receptor fins que aquest el comprèn. Fa aportacions enriquidores a les alternatives proposades per altres companys. Incorpora les alternatives plantejades per altres companys, adaptant-les a la pròpia tasca i millorant-les. (...)

A continuació s'ofereix un exemple d'activitat d'avaluació de la competència:

En Joan s'ha encarregat d'anar a comprar gelats per a la seva colla. Ha comprat quatre bombons de xocolata i sis polos de fruites, que li han costat en total 11,60 euros. Quan ha de passar comptes amb els seus amics s'adona que no ha pensat d'agafar el tiquet, però recorda que fa poc va comprar, al mateix lloc, dos bombons i quatre polos i li van costar 7 euros justos.

Com pot deduir el preu de cada gelat? Hi ha més maneres de trobar aquest preu?

Aquest problema permet diverses aproximacions i resolucions. Una via molt habitual de resolució seria plantejar un sistema de dues equacions i seguir qualsevol dels procediments estàndard de resolució de sistemes. També es pot resoldre raonant aritmèticament i combinant quantitats de gelats i preus: per exemple, es pot observar què es va comprar "de més" el segon dia: 2 bombons i 2 polos, que costa 4,60 € i, en tenir en compte la compra anterior, s'arriba a la solució. Es poden fer plantejaments gràfics, siguin explícits (dibuixant els gelats) o esquemàtics (representant cada article amb un símbol). Igualment la comparació visual de la compra dels dos dies permet encetar un procés iteratiu que porta a la solució. El tempteig és un mètode prou vàlid, si bé un tempteig "a cegues" no serà considerat una bona estratègia de resolució. Si el tempteig es fa utilitzant una taula, ja denota una certa estratègia.

L'alumne que només utilitzi una de les tipologies de resolució (per bé que la faci) i no sigui capaç de continuar un mètode alternatiu indicat per un company, mostraria un nivell 1 d'adquisició de la competència. Si domina els propis mètodes i és capaç de continuar procediments de resolució alternatius iniciats per companys, es consideraria una resposta de nivell 2. Si aconsegueix refinar el mètode proposat per un company i combinar diversos d'aquests mètodes, tindriem una resposta de nivell 3.

COMPETÈNCIA 4

Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes

Explicació

Per poder generar preguntes rellevants des d'un punt de vista matemàtic, és necessari que l'alumne sàpiga destriar quines preguntes admeten un tractament matemàtic i quines no. És a dir, quins són els tipus de respostes que les matemàtiques poden oferir en funció de la situació tractada.

El domini d'aquesta competència implica reconèixer i identificar oportunitats del nostre entorn en les quals es poden aplicar i utilitzar les matemàtiques per respondre a problemes diversos i interpretar les possibles respostes en el context d'aquest problema, determinant si són raonables en la situació objecte d'estudi.

Les preguntes que es plantegin han de ser, abans que res, interessants. Cal descartar les preguntes que juguin amb nocions matemàtiques però no aportin cap informació rellevant ni un aprofundiment en el coneixement de la situació.

Aquesta competència requereix una interiorització del procés de traducció d'un problema a llenguatge matemàtic i una destresa en l'ús de les eines matemàtiques per resoldre problemes. Sense aquests coneixements, difícilment es podran relacionar els fenòmens de l'entorn amb el seu possible tractament matemàtic.

Entre els continguts clau per a l'assoliment d'aquesta competència cal remarcar els que fan referència al sentit del nombre i de les operacions, als patrons, les relacions i les funcions, a l'anàlisi del canvi, als diversos tipus de funcions, al sentit espacial i la representació de figures tridimensionals, a les relacions i transformacions geomètriques, a la comprensió de les magnituds i de la mesura, al sentit de l'estadística i al sentit i la mesura de la probabilitat.

En la gradació dels nivells d'assoliment es tenen en compte dos criteris. En primer lloc, la complexitat matemàtica del problema o pregunta proposats i, en segon lloc, la coherència entre el problema i el context en què es planteja, és a dir, si les característiques del context es tenen en compte en el problema (quan-

titat, aproximació, tipus de nombres...), o també si la pregunta proporciona informació rellevant pel context.

Gradació

- 4.1. Generar preguntes o problemes d'aplicació directa, parcialment coherents amb el context en què es plantegen, respectant i acollint algunes de les seves característiques.
- 4.2. Generar preguntes o problemes que impliquin connexions i que siguin coherents amb el context en què es plantegen, respectant i acollint les seves característiques.
- 4.3. Generar preguntes o problemes que comportin generalització i que siguin coherents de manera idònia amb el context en què es plantegen.

Continguts clau

- Sentit del nombre i de les operacions.
- Patrons, relacions i funcions.
- Anàlisi del canvi i tipus de funcions.
- Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.
- Relacions i transformacions geomètriques.
- Magnituds i mesura.
- Sentit de l'estadística.
- Sentit i mesura de la probabilitat.

Orientacions metodològiques

L'actitud d'interrogació, de recerca, és essencial per impulsar aquesta competència. Cal que el professorat tibi de l'alumnat i, donat un context (amb sentit i oportunitat), l'acostumi a plantejar-se qüestions que es voldrien saber i que podrien resoldre's matemàticament. Com a guia per veure si una situació admet tractament matemàtic, cal que el professorat acostumi l'alumnat a fer-se preguntes del tipus:

- Es pot representar aquesta situació? Es pot esquematitzar?
- Recorda a alguna situació tractada amb anterioritat?
- Hi ha algun aspecte mesurable o quantificable?
- Hi ha alguna cosa que es pugui classificar? Té interès aquesta classificació?
- Què succeeix si modifiquem un element? Com canvien els altres?
- Hi ha algun tipus de funció que expliqui què està passant? Pot fer-se una gràfica d'aquesta funció?
- Es pot predir què passarà?

La resposta a aquest tipus de preguntes pot conduir l'alumnat cap als diferents continguts curriculars de matemàtiques i permetre-li decidir sobre els aspectes matematitzables de la situació, aquells que poden ser objecte de la seva curiositat i investigació.

Els contextos, reals, de les altres àrees o matemàtics, han d'interessar l'alumnat; si no és així, les propostes donaran molt poc joc. Les situacions que donen peu al plantejament de problemes han de començar en un entorn conegut i, progressivament, obrir-se a situacions menys familiars, tot i que sempre han de tenir un cert interès i significat per a l'alumne. Cal tenir cura a diversificar tant els contextos que es presentin com el suport en què es proposen: textos descriptius, narracions, jocs, fotografies, gràfics... Alguns exemples d'activitats que poden ajudar l'alumnat a proposar problemes són:

- Reformular problemes: particularitzar un problema, plantejar problemes més senzills per mirar de resoldre'n un de més complex, refer un problema per estendre el seu abast...
- Formular problemes a partir d'altres problemes: plantejar-ne que tinguin la mateixa solució (en contextos matemàtics o no), veure com afecta al problema el fet de canviar les dades, problemes que sorgeixen com a interrogants possibles durant la resolució d'un altre problema o d'una recerca...
- Donar un gràfic, una taula, un escenari (foto, dibuix...) i que proposin preguntes i problemes.
- Cercar estratègies guanyadores en jocs i veure com s'han de modificar si es canvia alguna regla del joc.
- Fer que els alumnes proposin problemes complets (enunciats) a partir de donar la pregunta (relativa a un context), proposar-ne dos de diferents amb la mateixa pregunta...
- Proposar a l'alumnat la cerca de problemes relatius a una situació per tal que els plantegin com a repte als companys. Les accions de cercar amb criteri, elegir el nivell adequat i presentar el problema als companys, obliguen a una reflexió seriosa i diferent de la que es planteja en el treball a l'aula.

El projecte de recerca de 4t d'ESO constitueix un marc molt adequat per treballar aquesta competència.

Un cop l'alumnat hagi plantejat preguntes entorn de la situació mostrada, també caldrà fer-lo reflexionar amb qüestions del tipus:

- Com connecta aquesta pregunta amb el problema de partida?
- Com començaria una possible via de resolució?
- S'han d'anar a buscar dades complementàries?
- Hi ha restriccions en les condicions?
- La informació que s'obtindrà és rellevant? És interessant?

Aquest tipus de preguntes porten l'alumnat a reflexionar sobre la riquesa i la rellevància de les preguntes plantejades.

El treball en grup, sigui petit o gran, és essencial per desenvolupar aquesta competència. Encara que en algunes fases de reflexió inicial pot ser bo que l'alumnat treballi individualment, posteriorment caldrà compartir. La diversitat de punts de vista sobre una situació, compartits i debatuts amb criteris matemàtics, pot impulsar molt més la reflexió sobre els aspectes interessants i matematitzables d'una situació que no pas les pistes que pugui anar deixant el professor.

Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència es pot descriure un context de canvi (aritmètic, geomètric, estadístic...) i demanar que l'alumne planteji preguntes i problemes matemàtics. També es pot demanar que transformin un problema en un altre canviant les dades i explicant com afecta a la resolució el canvi d'aquestes dades.

Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència, poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
<p>Genera preguntes d'aplicació directa no òbvies de tipus matemàtic a partir de contextos.</p> <p>Planteja problemes senzills com a particularització d'un problema complex.</p> <p>Modifica un problema per plantejar-ne un de similar.</p> <p>Donada una solució, planteja diversos problemes.</p> <p>A partir d'un gràfic, proposa preguntes que l'expliquin.</p> <p>(...)</p>	<p>Genera preguntes no òbvies de tipus matemàtic a partir de situacions sorgides en altres àrees del currículum.</p> <p>Genera preguntes de tipus matemàtic que impliquin connexions a partir de contextos.</p> <p>Planteja problemes més senzills per tractar de resoldre un problema complex.</p> <p>Planteja cadenes de preguntes (preguntes dependents unes de les altres).</p> <p>(...)</p>	<p>Delimita explícitament les restriccions i els condicionants de situacions que podrien donar-se en entorns propers (escolars o no).</p> <p>Genera preguntes matemàtiques que impliquin algun tipus de generalització a partir de contextos.</p> <p>Planteja problemes no immediats i amb un cert grau de riquesa a partir de situacions que podrien donar-se en entorns propers.</p> <p>Reelabora un problema per generalitzar els seus resultats. Proposa preguntes que posen de relleu algun concepte matemàtic que caracteritza la situació.</p> <p>(...)</p>

A continuació s'ofereix un exemple d'activitat d'avaluació de la competència:

Prenent el problema de la competència 1:

“En el bell mig d'un gran prat hi ha una cabana rectangular que fa dotze metres de llarg per sis metres d'ample. En una de les cantonades de la cabana hi ha una cabra lligada amb una corda de vuit metres de longitud. Quina superfície té la zona d'herba a l'abast de la cabra?” ens plantejem:

Com variaria la zona que pot pasturar la cabra si variem la longitud de la corda? I si canviem de posició el punt on està lligada la cabra? Com canviaria la situació amb altres tipus de cabanes? Proposa als teus companys algun problema basat en aquests o altres canvis de la situació donada.

Un primer nivell de generació de preguntes vindria donat per canvis en els nombres. L'alumne que prova amb diferents longituds de la corda i arriba a fer un croquis de les diferents situacions, tot i que potser sense es-

tablir una categorització formal, o fa alguna provatura de lligar la cabra en un punt diferent, podria arribar a plantejar preguntes del tipus: en quin punt del rectangle hauria de lligar la cabra per tenir més superfície de pastura? Si la lligo en un punt que no sigui una cantonada, tindrà més o menys herba per pasturar? Aquestes preguntes mostrarien un nivell 1 d'adquisició de la competència.

Un tipus de resposta de nivell 2 seria alterar alguna de les condicions de partida, introduir nous elements que permetin noves operacions o proposar noves condicions. Els alumnes caracteritzen les regions possibles i veuen que la geometria del problema no canvia si alterem les dimensions de la cabana rectangular; poden esbossar altres possibilitats que canvien parcialment la geometria de la situació triant diferents punts on lligar la cabra i plantejar nous tipus de preguntes.

En un nivell 3, l'alumne podria sistematitzar alguna de les vies de variació de la situació esmentades en el nivell anterior o explorar possibilitats que canvien totalment la geometria de la situació. Pot arribar a plantejar preguntes del tipus: quina forma té la superfície de pastura si la cabana és rodona o és triangular? Quina forma de cabana, amb un perímetre fixat, em donaria la màxima superfície de pastura? Quina forma tindria la superfície si allargo indefinidament la corda?

Dimensió raonament i prova

El raonament és consubstancial a la construcció del coneixement matemàtic, i per tant, ha d'estar present en l'aprenentatge de les matemàtiques. La prova, conjuntament amb el raonament, permet donar sentit i validar el coneixement matemàtic.

El desenvolupament de la capacitat de raonar que es fa dins de l'educació matemàtica ha de tenir com a objectiu que l'alumne l'apliqui a tots els àmbits de la seva vida quotidiana amb prou precisió lògica. Quan el raonament es concreta en la prova permet a l'alumne assolir confiança i seguretat en la resolució de situacions, siguin matemàtiques o no.

L'alumne ha d'entendre que refusar un raonament té un aspecte positiu, el de cercar unes altres vies i, també, que la validació d'una afirmació no és el final sinó l'obertura cap a noves argumentacions.

Utilitzar el raonament matemàtic implica:

- Analitzar situacions, per comparació i per contrast.
- Fer conjectures adaptades a la situació.
- Comprovar, validar o refutar conjectures.
- Precisar i ampliar conjectures.
- Experimentar de manera sistemàtica i comprovar de manera exhaustiva.
- Relacionar conceptes, organitzar-los i cercar equivalències.
- Generalitzar, establint models i patrons.
- Particularitzar models generals a casos concrets.
- Argumentar per comunicar i validar processos i resultats.

Aquests aspectes es poden presentar de forma conjunta i interactuar entre ells.

El raonament i la prova han de poder aplicar-se a la vida quotidiana en entorns no necessàriament matemàtics i contribuir als raonaments propis de les altres àrees de coneixement.

El disseny i la gestió de les activitats ha de permetre a l'alumne: fer i fer-se preguntes, tenir una visió global del procés seguit des de la situació inicial fins al resultat final, admetre que la solució potser no existeix o que no és única, admetre que l'error forma part del procés, adonar-se que la resolució és un pas per continuar resolent més situacions i tenir sentit crític.

Aquesta dimensió està integrada per dues competències matemàtiques:

- **Competència 5.** Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.
- **Competència 6.** Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.

COMPETÈNCIA 5

Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques

Explicació

Un fet essencial de les matemàtiques és saber utilitzar la seva estructura lògica i, generalment mitjançant demostracions, validar la raonabilitat de les afirmacions prèviament fetes.

Aquesta competència implica:

- Fer argumentacions sobre:
 - propietats de nombres (ex. divisibilitat de nombres), figures geomètriques (ex. suma dels angles del triangle) construccions geomètriques (ex. construcció d'un con a partir d'una recta), les funcions (ex. periodicitat), dades obtingudes en una anàlisi estadística (ex. mitjana);
 - relacions entre conceptes per comprovar i demostrar la seva equivalència.
- Utilitzar patrons, proporcions, construccions, algorismes, ús de contraexemples com a eines per a les demostracions.
- Usar processos de raonament recursiu (ex. sèries de nombres quadrats), deductiu, inductiu, relacional (ex. associar nombres amb àrees), que mitjançant taules, gràfics, símbols, anàlisi de dades... permetin precisar, contrastar, comprovar i demostrar les afirmacions fetes.

La gradació dels nivells d'assoliment de la competència s'ha fet atenent a la complexitat de l'argumentació i de la prova. Explicar, conjecturar i argumentar pel que fa al primer criteri; comprovar fent càlculs, posar contraexemples i deduir o induir pel que fa al segon criteri.

Gradació

- 5.1.** Fer explicacions justificant afirmacions matemàtiques i aportant, si cal, proves numèriques i gràfiques per validar-les.
- 5.2.** Emprar generalitzacions o concrecions, fer conjectures i comprovacions i identificar contraexemples per justificar o rebutjar afirmacions en matemàtiques.
- 5.3.** Construir argumentacions matemàtiques emprant processos recursius, inducció i deducció, expressar-les amb precisió i contrastar-les amb els altres.

Continguts clau

- Sentit del nombre i de les operacions.
- Raonament proporcional.
- Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).
- Llenguatge i càlcul algebraic.
- Patrons, relacions i funcions.
- Anàlisi del canvi i tipus de funcions.
- Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.
- Relacions i transformacions geomètriques.
- Sentit de l'estadística.
- Sentit i mesura de la probabilitat.

Orientacions metodològiques

L'argumentació és una activitat abstracta i complexa per a l'alumnat, que cal treballar acuradament a classe. Requereix conèixer bé les idees matemàtiques que es volen justificar i, alhora, contribueix a aclarir-les i consolidar-les.

Una manera d'iniciar l'alumnat en l'argumentació és demanar-los que expliquin el que han fet per resoldre un problema i el perquè de cada pas del procés que els ha portat al resultat o també es poden aprofitar activitats experimentals (construcció de figures geomètriques, simulacions de probabilitat...).

El professorat animarà els alumnes a fer conjectures, ajudarà que s'adonin de propietats comunes (per exemple la suma dels angles d'un triangle, nombre màxim de xifres del període en l'expressió decimal d'un nombre fraccionari), o que amplïin algunes idees prèvies. També caldrà que el professorat proposi als alumnes un procés de recerca per trobar les raons que els permetin argumentar la validesa de les afirmacions fetes. Per això podrà cercar nous exemples, eixamplar coneixements ja coneguts, explicar els procediments seguits per arribar a la conjectura o generalització, emprar representacions diverses, etc.

L'ús de les argumentacions requereix un esperit i un ambient franc, obert i de participació que s'ha d'incorporar a l'activitat que es desenvolupi per aconseguir aquesta competència. La conversa, el diàleg i fer preguntes que requereixin respostes raonades haurien de ser formes habituals de contrast i intercanvi entre l'alumnat.

És important que els professors afavoreixin que els alumnes expliquin i defensin públicament els processos i resultats obtinguts. Habitualment ho faran de forma oral, sense que per això deixin d'utilitzar altres formes de comunicació: escrita, gràfica, geomètrica, multimèdia... Per mostrar les relacions entre idees matemàtiques pot ser interessant que l'alumnat construeixi esquemes de processos o de relacions conceptuals i proposar activitats d'esquematzació, d'argumentació, així com d'activitats de contrast entre argumentacions diverses sobre un mateix resultat.

El professorat ha de marcar ritmes diferents i a les fases inicials caldrà anar poc a poc i plantejar molt sovint preguntes. El professor ha de promoure l'ús del raonament matemàtic i la prova adaptant-los a la situació de l'alumne —edat, coneixement, motivació—, al context —propre (escolar i no escolar). Aquestes adaptacions comportaran flexibilitat en l'exigència dels nivells de raonament i prova, que pot anar des de la simple comprovació pautada i directa fins a les argumentacions i generalitzacions.

El desenvolupament d'aquesta competència ha d'ajudar a incrementar el plaer per les matemàtiques, ja que permet a l'alumnat gaudir del procés realitzat, encara que hagi de refusar una conjectura.

També es poden argumentar afirmacions donades per d'altres (per exemple, "El producte de dos nombres qualssevol sempre és més gran que qualsevol dels nombres") i observar la seva validesa segons el conjunt numèric que intervé (naturals, enters, decimals compresos entre 0 i 1...), raonar contraexemples i emprar diferents representacions d'un mateix concepte (per exemple, representacions geomètriques d'identitats notables), etc.

Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència es pot proposar que s'argumenti una propietat numèrica, un patró geomètric, un procés de construcció d'una figura... però en un context quotidià o d'una altra disciplina. També es pot demanar que s'argumenti una anàlisi de dades estadístiques a partir d'una taula o un gràfic, justificar i comprovar una conjectura sobre una sèrie obtinguda a partir d'una situació que va canviant, que es generalitzi una propietat a un conjunt de validesa més ampli...

Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
Fa afirmacions matemàtiques utilitzant exemples per a una millor comprensió. Fa explicacions sobre les afirmacions utilitzant patrons. Assaja estratègies (tempteigs, llistes d'exemples, cadenes de preguntes...) Usa comprovacions diverses: numèriques, gràfiques, manipulatives... (...)	Empra generalitzacions en alguns moments del procés. Empra casos particulars en alguns moments del procés. Empra conjectures per generalitzar-les o rebutjar-les. Empra exemples de forma sistemàtica per continuar l'argumentació. Usa contraexemples en el procés de raonament. (...)	Usa processos de raonament deductiu, inductiu, recursiu, analògic... Argumenta les propietats matemàtiques en el procés de justificació. Explica equivalències entre els conceptes usats en el raonament. Construeix argumentacions matemàtiques i les expressa amb precisió. Explica de forma entenedora a altres persones: esquemes, guions... (...)

A continuació s'ofereix un exemple d'activitat d'avaluació de la competència:

Una prova consta de 20 preguntes amb dues opcions de resposta per a cada pregunta. S'assigna +1 punt a cada resposta correcta i 0 punts en cas contrari.

El professor planteja als alumnes si cal posar valors negatius a les preguntes de resposta no correcta, i demana raons per explicar la validesa de la inclusió de puntuació negativa a les preguntes. També demana com podrien variar les raons si es fa la prova amb tres o més opcions de resposta i si és possible trobar una expressió funcional entre el nombre d'encerts i la puntuació final.

Un exemple de resposta de nivell 1 d'adquisició seria si l'alumne afirma que posant a l'atzar les respostes aleshores es poden encertar 10 de les 20 preguntes inicials i que, per tant, si no es modifica la puntuació s'obtindria un 5 en una escala de puntuació de 0 a 10.

Un exemple de resposta de nivell 2 d'adquisició seria si l'alumne es pregunta com hauria de puntuar les respostes incorrectes si en lloc de dues opcions a cada qüestió fossin tres opcions. Planteja criteris sobre una sola qüestió que té aquests tres possibles resultats: V (veritat), F1 (fals 1) i F2 (fals 2) i assigna el valor 1 si la resposta és correcta i aprofita el que ha fet quan hi havia dues qüestions i fa l'assignació següent: 1 punt si és correcta i $-1/2$ per qualsevol de les altres i després ho fa extensible a la resta de qüestions. També, les afirmacions i/o respostes d'un alumne se situarien en el nivell 2 si fa generalitzacions a quatre o més opcions i arriba a afirmar que fer moltes opcions complica la prova i, també, que quan s'incrementen les opcions de resposta disminueixen els resultats deguts a l'atzar.

La resposta se situaria en el nivell 3 quan explica, primer en el cas de dues opcions, per què cal posar valors negatius i es planteja què és més fàcil d'entendre? a) Per superar la prova, de 20 preguntes, cal fer 15 preguntes bé o b) No explicar res de la puntuació negativa i dir que cal treure en una puntuació de 0 a 10, un 7,5 per superar la prova.

També si amplia les preguntes a més opcions o bé quan intenta expressar, a través d'una funció, l'associació entre respostes correctes i puntuació, de 0 a 10, o bé d'altres.

COMPETÈNCIA 6

Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics

Explicació

Transferir l'ús del raonament matemàtic a entorns no necessàriament matemàtics (escolar, familiar, de carer, administratiu, econòmic...) facilita el creixement i el coneixement en altres àmbits.

Aquesta competència implica:

- Utilitzar els raonaments numèrics, algebraics, mètrics, estadístics, i usar el llenguatge matemàtic en situacions properes, com per exemple variació de temperatures, superfícies i volums en edificis i donar noms matemàtics a objectes i situacions properes.
- Ampliar el raonament matemàtic, utilitzar el llenguatge matemàtic i fer ús de representacions de funcions, càlculs, taules, fórmules, mètodes estadístics a altres disciplines: ciències de la naturalesa, ciències socials, música, tecnologia, educació física, educació visual i plàstica, etc., per fer de forma natural un ús integrador del raonament matemàtic dins de cada matèria.
- Usar el raonament matemàtic per col·laborar a l'obtenció de coneixements més aprofundits a les altres àrees.
- Usar raonament matemàtic amb argumentacions reflexives i crítiques en àmbits no necessàriament matemàtics, com per exemple interpretar la variació d'un procés si s'altera un dels factors que hi intervenen.

La gradació dels nivells d'assoliment de la competència s'ha fet atenent a la proximitat del context i a la forma d'emprar el raonament. Aplicar el raonament matemàtic a d'altres disciplines comporta major complexitat perquè suposa tenir un coneixement prou aprofundit dels conceptes implicats.

Gradació

- 6.1.** Emprar el raonament matemàtic en entorns propers.
- 6.2.** Emprar el raonament matemàtic en entorns propers i, en casos senzills, en altres disciplines.
- 6.3.** Emprar el raonament matemàtic en altres disciplines i en la vida quotidiana de manera autònoma, reflexiva i crítica.

Continguts clau

- Sentit del nombre i de les operacions.
- Llenguatge i càlcul algebraic.
- Patrons, relacions i funcions.
- Anàlisi del canvi i tipus de funcions.
- Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.
- Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.
- Sentit de l'estadística.
- Sentit i mesura de la probabilitat.

Orientacions metodològiques

Incorporar i ampliar l'àmbit d'aplicació del raonament matemàtic, a més d'ajudar en altres coneixements, ha d'ajudar al fet que la matemàtica sigui més compresa i acceptada en altres àmbits i considerada com un aspecte vital del coneixement humà.

El professorat promourà l'ús habitual del raonament matemàtic que permetrà a l'alumnat relacionar les matemàtiques amb altres àmbits i fer-ne créixer el seu coneixement valorant, al mateix temps, l'aportació realitzada des de les matemàtiques.

La definició mateixa de la competència permet utilitzar:

- espais (edificis, carrers, mapes...),
- objectes propers (taules, materials...),
- informacions (notícies, gràfics...),
- situacions de la vida quotidiana (increment de preus, descomptes, rebaixes) que es poden aprofitar en qual-sevol moment, per exemple: "Raona el fet que a la ciutat de Barcelona hi ha unes avingudes que reben el nom de la Diagonal, la Meridiana i el Paral·lel".

El professorat pot usar:

- l'entorn habitual de l'alumne per treballar sobre elements dins de l'aula, sobre el temps que tarda per arribar al centre escolar, distribució de despeses personals...
- entorns artístics, arquitectònics relacionant-los amb funcions (estil romànic, estil gòtic, formes gaudinianes...),
- qüestions de la vida quotidiana, com l'existència de diferents preus en els enviaments de paquets segons el pes del paquet, diferències de comissions a rebre per un venedor segons el volum de vendes, diferències d'impostos segons els ingressos obtinguts, això li pot permetre raonar el comportament en els punts límits de cada tram,
- estudi de diversos sistemes d'escrutini després d'una elecció: majoritari, proporcional, llei d'Hondt...

També permet utilitzar aspectes d'altres disciplines:

- en ciències de la naturalesa: interpretació de mapes atmosfèrics, diversos tipus d'escapes, estudi des del camp de l'òptica...
- en ciències socials: estudi de taules estadístiques, piràmides de població, tipus d'impostos: directes, indirectes...
- en educació física: sistemes de puntuació en diversos esports...
- en altres com música, biologia...

Caldria que, des de la lectura dels currículums de diverses disciplines (ciències, tecnologia, música, educació visual, etc.), s'observi l'ús del raonament matemàtic dins d'elles i se'n faci ús com a llenguatge transversal, de forma anàloga a altres llenguatges (escrit, oral, visual, tecnològic...).

Caldria afavorir en els alumnes la recerca dels aspectes i raonaments matemàtics dins del seu entorn i en entorns més amplis (diaris, TV, Internet...).

Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència es pot partir d'una situació de l'àrea de ciències de la naturalesa i demanar que s'apliqui el raonament proporcional (directe o invers) a la relació entre les variables que apareguin. També es pot demanar raonar la validesa de les afirmacions de caràcter matemàtic que es fan en situacions de la vida quotidiana, com ara en la interpretació d'una notícia, dels rebuts de serveis, etc.

Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
Planteja de forma senzilla una situació propera.	Relaciona conceptes d'altres disciplines.	Realitza raonaments reflexius i crítics a l'afirmació plantejada.
Fa observacions sobre la situació propera per després fer raonaments matemàtics.	Emptra generalitzacions en alguns moments del procés.	Explica de forma entenedora a altres persones: esquemes, guions...
Relaciona les informacions que troba dins de la situació.	Realitza conjectures sobre les afirmacions fetes.	Amplia els raonaments a altres situacions o disciplines.
Fa tempteigs, preguntes, per ampliar o acotar les argumentacions.	Usa contraexemples, matemàtics o no, en el procés de raonament.	Comprèn que ha fet un avenç en el seu procés de raonament.
Assigna noms matemàtics a objectes, formes i situacions diverses.	(...)	(...)
(...)		

A continuació s'ofereix un exemple d'activitat d'avaluació de la competència:

Disseny i argumentació d'accions per estalviar energia i consum d'aigua en una casa.

A partir dels rebuts d'aigua, electricitat i consum energètic de diversos aparells domèstics, l'alumne ha de dissenyar i argumentar quines accions duria a terme per estalviar energia i consum d'aigua en una casa. També pot ampliar l'argumentació a àmbits més amplis: escola, llocs de treball, transports, territori...

Les afirmacions i/o respostes d'un alumne se situarien en el nivell 1 quan afirma que cal tenir en compte els moments del dia/nit en l'ús dels aparells domèstics i, així, explica l'estalvi energètic i d'aigua que pot aconseguir i ho acompanya amb els diferents preus del consum entre el dia i la nit. Igualment quan afirma que cal mirar les instruccions d'ús dels aparells i aprofitar les seves indicacions per realitzar l'estalvi.

Les afirmacions i/o respostes d'un alumne se situarien en el nivell 2 quan afirma que caldria mesurar el consum d'altres tipus d'aparells i aporta dades directes i comparatives sobre consum de diversos aparells. Així mateix, quan afirma que caldria observar l'entorn de l'habitatge (ombrívol, assolellat, plantes baixes, aïllaments en parets, finestres...) i pot aportar costos del canvi d'alguns d'aquests elements.

Les afirmacions i/o respostes d'un alumne se situarien en el nivell 3 quan dissenya, raona i explica un pla d'acció per estalviar consum i despesa energètica a casa i a un conjunt d'habitatges i també quan amplia els raonaments i estratègies realitzades al territori.

Dimensió connexions

La primera connexió que cal considerar és la dels processos o dimensions del currículum de matemàtiques amb els continguts. Per tant, caldrà considerar-los de manera integrada en la planificació i el disseny de l'activitat matemàtica. Hi ha idees transversals que són presents en diversos blocs de continguts, com ara quantitat, patró, equivalència, proporcionalitat, canvi, mesura... Hi ha connexions entre els diversos processos o dimensions. Per exemple, el raonament i la representació són cabdals en la resolució de problemes.

La majoria dels conceptes estan connectats amb altres conceptes, tant en el mateix bloc de continguts com amb d'altres blocs. També els algorismes i les tècniques matemàtiques s'han de relacionar amb els conceptes i propietats en què es basen, per tal de veure que formen un tot coherent i fortament connectat.

Conèixer aquestes relacions proporciona un saber més profund i aplicable. És important que es tingui consciència que els aprenentatges adquirits són útils i són font de nous sabers. D'altra banda, les idees matemàtiques s'apliquen a un gran ventall de fenòmens (altres àrees de coneixement, vida quotidiana...).

Els estudiants han de veure que les matemàtiques són alguna cosa més que un seguit de temes aïllats i que les poden usar en multitud d'ocasions en els contextos més diversos, arribant a considerar-les útils i rellevants per a la seva vida més enllà de l'escola. Ser capaç de descriure el món real usant les matemàtiques permet comprendre'l millor i preveure resultats i conseqüències.

Qualsevol tema i situació implica connectar idees matemàtiques. Trobar i aplicar relacions entre els conceptes dona major coneixement sobre el que s'està treballant, en particular, és important connectar el nou coneixement amb el que ja es té.

El professor ha de fer possible que s'adquireixi el coneixement de manera integrada més que no pas fragmentat. Per això, cal aprofitar les moltes ocasions que sorgeixen per relacionar coneixement proposant qüestions, demanant esquemes, provocant més maneres de resoldre, essent flexible a l'hora d'acceptar solucions, promovent un ambient d'intercanvi entre l'alumnat, etc. També ha de tenir un paper actiu en la proposta de connexions en moments clau i anar fent veure l'estructura que hi ha darrere les matemàtiques.

Aquesta dimensió està integrada per dues competències:

- **Competència 7.** Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.
- **Competència 8.** Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.

COMPETÈNCIA 7

Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar

Explicació

Arribar a veure les matemàtiques com un tot integrat facilita la flexibilitat en el raonament i en l'anàlisi de les noves situacions problemàtiques. La transferència dels coneixements que es tenen sobre una part de les matemàtiques cap a d'altres parts contribueix a promoure aquesta visió i facilita la comprensió dels continguts.

Això vol dir:

- Relacionar conceptes dels temes clau, com ara fraccions, decimals i percentatges.
- Relacionar els procediments amb els conceptes implicats.
- Integrar conceptes que tenen aspectes rellevants en comú, com per exemple integrant sota el raonament proporcional els conceptes de raó, proporció, percentatge, escala, figures semblants, pendents, probabilitat, distribucions estadístiques i, en general, les comparacions multiplicatives.
- Connectar les idees transversals, com ara la d'equivalència, relacionant l'equivalència de fraccions amb l'equivalència d'àrees i la equiprobabilitat, etc.
- Relacionar els blocs de continguts:
 - àlgebra i geometria;
 - nombres i geometria a través de la mesura geomètrica;
 - nombres, estadística i geometria;
 - relacions i canvi amb nombres, com en el cas dels patrons numèrics de divisibilitat, decimals periòdics, potències, notació científica;
 - relacions i canvi i geometria com el cas de les transformacions geomètriques.

En els nivells d'adquisició de la competència s'ha tingut en compte la complexitat de la connexió. Connectar continguts de blocs diferents i usar idees transversals o comunes a tots els blocs, usant, a més, el llenguatge matemàtic es considera de nivell avançat.

Gradació

- 7.1.** Usar relacions concretes entre conceptes matemàtics per analitzar situacions.
- 7.2.** Usar les connexions entre els conceptes i procediments de les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions.
- 7.3.** Usar les relacions entre les diverses parts de les matemàtiques, emprar el llenguatge matemàtic i aplicar idees transversals per analitzar situacions i per construir raonaments.

Continguts clau

- Sentit del nombre i de les operacions.
- Raonament proporcional.
- Llenguatge i càlcul algebraic.
- Patrons, relacions i funcions.
- Relacions i transformacions geomètriques.
- Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.
- Dades, taules i gràfics estadístics.

Orientacions metodològiques

Estimular l'ús de les connexions entre les idees matemàtiques comença per programar continguts i processos de forma conjunta i integrada. En dissenyar les seqüències d'aprenentatge s'ha de tenir en compte quines connexions es consideraran preferents i com es faran explícites als alumnes.

Una manera d'afavorir les connexions és triar un tema com a organitzador, de manera que apareguin junts certs continguts. Un cas fonamental a l'ESO és el de la proporcionalitat. Un altre exemple podria ser el tema de "Perímetre, àrea i volum", en què podem establir lligams entre:

- les fórmules d'àrees i volums de figures tridimensionals amb els polinomis i el seu grau; també amb el tipus de dependència del perímetre, àrea o volum d'una figura respecte de les seves mides (d'una variable, de dues; de primer, segon o tercer grau; recta, paràbola, hipèrbola),
- àrea i perímetre; àrea i volum (com a casos de no-dependència),
- màxim volum i forma d'un prisma (donada l'àrea total),
- els canvis d'unitat de mesura en el cas d'àrea i volum, amb la multiplicació i les potències,
- l'àrea total d'un cos i els processos de transformació dels desenvolupaments plans mantenint l'àrea,
- àrees equivalents i teorema de Pitàgores,
- fórmules del volum i descomposició d'una figura en parts,
- precisió en els càlculs d'àrees i volums i com afecten les xifres decimals al càlcul, etc.

Alguns temes, com l'àlgebra, es poden enfocar relacionant-los amb d'altres més coneguts pels alumnes com l'aritmètica (generalització de propietats) o amb la geometria (costats i àrees de quadrats i rectangles per representar variables o productes de variables).

De manera general caldrà que el professorat:

- activi els coneixements previs en iniciar un tema i en faci esment quan calgui durant el treball del nou tema,
- plantegi en començar una activitat si en recorden alguna altra que s'hi assembli, per afavorir la transferència d'idees des d'altres contextos,
- introdueixi les connexions rellevants en contextos concrets on es vegi la seva utilitat, per exemple usant un mateix tipus de representació (recta, coordenades, taula...) per a conceptes diversos,
- demani que pensin estratègies alternatives, o altres representacions per a una situació.

En les sessions conjuntes de discussió cal demanar que explicitin les connexions que han usat i que les expliquin, s'han de recollir tant les que el professor hagués introduït anteriorment, com les noves que provenen de l'alumnat. Al final d'una activitat o tema, se'ls ha de demanar que facin un esquema que mostri les relacions entre els conceptes implicats i discutir-lo amb la classe.

En general el professor ha de tenir un paper actiu en la proposta de connexions en moments clau i aprofitarà totes les ocasions possibles per fer evidents relacions que potenciïn la visió de les matemàtiques com un tot integrat.

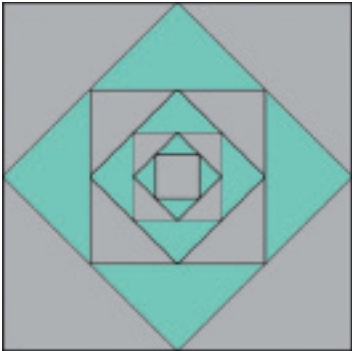
Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència es poden proposar qüestions que impliquin diversos blocs de continguts, de manera que sigui fàcil que s'evidenciïn connexions en l'exploració de la situació o en la resposta a preguntes. També es poden proposar preguntes en situacions en què el raonament proporcional permeti fer connexions o bé situacions en què intervinguin diversos tipus de nombres i en què es necessiti identificar equivalències.

Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
<p>Usa equivalències numèriques concretes en fer càlculs.</p> <p>Transforma expressions aritmètiques o algebraiques per analitzar situacions.</p> <p>Relaciona conceptes bàsics del mateix bloc de continguts.</p> <p>Fa connexions simples amb altres parts de la matemàtica.</p> <p>(...)</p>	<p>Usa relacions geomètriques per analitzar situacions algebraiques.</p> <p>Usa relacions i equivalències numèriques per analitzar situacions d'atzar i estadístiques.</p> <p>Relaciona procediments amb els conceptes implicats.</p> <p>Transfereix idees d'altres parts de les matemàtiques i fa connexions adients.</p> <p>(...)</p>	<p>Usa idees transversals per connectar.</p> <p>Proposa connexions no treballades però significatives.</p> <p>Explica la connexió usant llenguatge matemàtic.</p> <p>Transfereix idees d'altres parts de les matemàtiques i fa connexions originals.</p> <p>Usa una connexió concreta però li dóna un cert grau de generalització.</p> <p>(...)</p>

A continuació s'ofereix un exemple d'activitat d'avaluació de la competència:



Mira atentament la imatge. Quina és la proporció de la imatge que està en color verd? Dóna una explicació de la teva resposta que pugui convèncer els teus companys.

Si el patró continués per sempre cap al centre del quadrat, quina proporció de la imatge seria verda? Dóna una explicació convincent.

Un exemple de resposta de nivell d'adquisició 1 seria el d'un alumne que superposés quadrícules sobre la imatge de manera que obtingués les diverses fraccions verdes, sumés i obtingués $\frac{21}{64}$ o bé un 32,8125%. En aquest cas es connecta àrea i fracció, després fracció i el corresponent percentatge, però no respon al cas general. També seria de nivell 1 si, per exemple, tria el quadrat del centre com a àrea 1 i, a partir d'aquesta mesura, calcula les altres zones verdes.

Un exemple de resposta de nivell d'adquisició 2 seria aquell en què l'alumne raona sobre el plegat de les cantonades cap endins, comentant l'àrea verda que queda visible en cada cas. Obté sempre el 50% del cas anterior i diu que, per tant, tindrem una part verda per cada dues grises. Per tant, usa un patró geomètric de relació entre àrees de quadrats i arriba a una regla general.

L'ús del llenguatge matemàtic per analitzar la situació implica un nivell d'adquisició 3. Per exemple, si un alumne calcula les fraccions de cada sèrie de colors: grises $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{128}$...; verdes $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{256}$... i compara els termes corresponents de cada seqüència, obté en cada cas una relació d' $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{3}$ dels $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$, $\frac{1}{16}$ és $\frac{1}{3}$ dels $\frac{3}{16}$...).

COMPETÈNCIA 8

Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes

Explicació

Es demana associar models o estructures matemàtiques a contextos diaris, de l'entorn o d'altres disciplines, més enllà de la resolució de problemes extrets del món real. Per exemple: la identificació dels nombres enters com a model de situacions de mesura de temperatures, d'altituds relatives, fusos horaris, dades econòmiques, etc., permetrà aplicar a aquests contextos les propietats i representacions simbòliques dels enters per obtenir més informació sobre el context.

Tenir coneixement conscient de models matemàtics diversos possibilita el seu ús en contextos disciplinaris, com en el cas de les funcions en les ciències naturals o les socials. Més enllà de l'ús instrumental de les matemàtiques, possibilita una millor comprensió dels conceptes de les altres disciplines.

Tot plegat pot fer entendre i valorar la rellevància de les matemàtiques en la comprensió del món real i viceversa.

Continguts rellevants per desenvolupar aquesta competència són: el llenguatge i càlcul algebraic, les funcions, l'espai i les representacions tridimensionals, les mesures, els mètodes estadístics d'anàlisi de dades i el sentit i la mesura de la probabilitat.

En els nivells d'adquisició de la competència s'ha tingut en compte tant els contextos en què s'identifiquen les matemàtiques implicades com el nivell de complexitat de les eines i formes de treball matemàtic emprats per descriure i analitzar la situació matemàticament. Poder fer també el procés invers de donar contextos d'aplicació d'una estructura o model concrets s'ha considerat de nivell avançat.

Gradació

- 8.1.** Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes emprant els coneixements i les representacions matemàtiques per descriure-les.
- 8.2.** Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques, emprar els coneixements, les eines i la forma de treballar de les matemàtiques per descriure-les i analitzar-les.
- 8.3.** Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques, emprar els coneixements, les eines i la forma de treballar de les matemàtiques per descriure-les i analitzar-les. I a l'inrevés, reconèixer estructures matemàtiques concretes en àmbits diferents.

Continguts clau

- Raonament proporcional.
- Llenguatge i càlcul algebraic.
- Patrons, relacions i funcions.
- Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.
- Magnituds i mesura.
- Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.
- Sentit i mesura de la probabilitat.

Orientacions metodològiques

El procés de matematitzar i el seu invers de contextualitzar són el nucli d'aquesta competència. En primer lloc, per potenciar la traducció de situacions properes o acadèmiques a models matemàtics com ara els enters, les funcions, les figures tridimensionals, la probabilitat, etc., cal plantejar l'aprenentatge d'aquests temes des de contextos on es trobin reflectits. L'alumne s'acostumarà progressivament a percebre els aspectes matemàtics de la realitat i els identificarà amb més facilitat.

La descripció de situacions del món real usant les matemàtiques implica un procés de simplificació de la realitat. Per conduir aquest procés el professor plantejarà la representació de la situació mitjançant esquemes, gràfics, taules, vocabulari matemàtic i també signes i símbols, prescindint de detalls concrets, quedant-se només amb allò essencial des del punt de vista matemàtic. A partir de la representació potenciarà la descoberta de noves relacions entre les dades i la seva expressió. Un cop identificats els conceptes matemàtics implicats en la situació procurarà la connexió amb les seves propietats i procediments específics per analitzar o resoldre les qüestions plantejades.

A mesura que es vagi posant en pràctica la matematització, es podrà aprofundir en els models, trobant més propietats i relacions. Els conceptes s'enriquiran progressivament amb noves mirades, completant el seu significat amb nous elements. Per exemple, reconèixer la proporcionalitat en temes de canvis de moneda, de canvis de grandària, en la dosificació de medicaments, preus segons quantitat, descomptes, escales de representació, receptes de cuina, concentracions de sòlids en líquids, velocitat d'un cotxe, etc., els permetrà resoldre qüestions al voltant d'aquests temes usant tot el que saben d'aquest contingut matemàtic.

Els contextos que ofereixen les diverses matèries del currículum de l'ESO, especialment ciències socials i ciències de la naturalesa, són una manera de veure el paper instrumental i de llenguatge científic que tenen les matemàtiques en les altres ciències. Per exemple, hauria de ser senzill interpretar les relacions entre velocitat, temps i acceleració per a alumnes que saben plantejar i resoldre equacions de primer i de segon grau. El professor potenciarà la mirada matemàtica de la realitat en totes les ocasions possibles. Des de la tria de contextos fins a l'impuls d'activitats especials, com ara l'ús de la fotografia, els vídeos, les sortides, les visites d'exposicions, etc.

A més d'usar models matemàtics en les altres disciplines, es poden dur a terme propostes interdisciplinàries de diversos tipus. Des d'integrar una part o tot el currículum de ciències i matemàtiques fins a plantejar projectes en què participin totes o gairebé totes les àrees. Això sí: és important que les matemàtiques no es plantejgin com un mer instrument de càlcul. En aquest plantejament interdisciplinari la coordinació entre l'equip docent és fonamental.

Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència es poden plantejar qüestions en contextos quotidians o d'altres àrees en què apareguin conceptes que són clau a l'ESO, com ara fraccions, i en casos en què calgui determinar el significat de les fraccions en relació amb el context. També determinar els tipus de relacions quantitatives (proporcionalitat directa o inversa) entre magnituds que apareixen en una fórmula relativa a física. Igualment, representar en llenguatge matemàtic situacions quotidianes.

Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència, poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
Usa representacions poc abstractes de situacions properes. Treballa només amb les relacions molt evidents entre les dades. Detecta alguns conceptes però no reconeix l'estructura matemàtica implicada. Usa representacions gràfiques, esquemes, taules tant en situacions properes com acadèmiques. (...)	Troba noves relacions entre les dades. Reconeix l'estructura matemàtica implicada però en treu poc partit. Interpreta les noves relacions de manera no gaire eficient, en relació amb la situació inicial. (...)	Usa tota mena de representacions, incloent llenguatge matemàtic en situacions properes i acadèmiques. Reconeix l'estructura matemàtica implicada i en fa ús per analitzar la situació. Proposa exemples de situacions amb la mateixa estructura matemàtica. Interpreta les noves relacions obtingudes en el context de la situació. (...)

A continuació s'ofereix un exemple d'activitat d'avaluació de la competència:

A partir d'una notícia d'un diari es planteja una pregunta. La notícia explica que en un país del nord d'Europa la gent creu que les monedes d'un cèntim haurien de desaparèixer. El professor planteja la pregunta: quins valors haurien de tenir les monedes per tal que es pogués pagar qualsevol quantitat i no n'hi hagués massa de diferents?

Per començar demana què passaria si les monedes fossin de 3 euros i de 5 euros. Hi ha quantitats enteres que no es puguin pagar? Quina és la quantitat més gran que no es pot pagar? Mantenint la moneda de 3 euros, amb quina altra es podria combinar per resoldre el problema de pagar qualsevol quantitat?

Un exemple de resposta de nivell 1 seria dir que el nombre més gran que no es pot pagar és 7 euros. Els nombres 8, 9 i 10 es poden obtenir. A partir d'aquí sumant tresos o cincs es poden aconseguir tots els valors. Tenim un alumne que usa representacions simbòliques de conceptes senzills (naturals) però només reconeix les relacions més evidents. No parla de múltiples, no expressa relacions formalment.

Una resposta de nivell 2 seria, per exemple, dir que usant el 3 i el 5 es poden obtenir totes les quantitats llevat 1, 2, 4 i 7. Trobant les sumes des de l'11 fins al 20, aconseguix la resta afegint múltiples de 10 (dues monedes de 5). Considera el cas en què es pot tornar canvi, en què es poden pagar totes les quantitats, cosa que mostra amb exemples per a 1, 2, 4 i 7. Aquest alumne adapta la seva resposta a la realitat, en què es pot tornar canvi. Usa el model de divisibilitat, encara que no li treu partit per generalitzar.

Una mostra de nivell 3 d'adquisició de la competència seria una resposta en què l'alumne veu l'estructura implicada en el problema i dona el patró general. Estudia altres possibilitats, com 2 i 7. Posa un nombre sota la representació $2x + 2y$, en què x i y són nombres enters. Conjectura que si aconseguim fer dos nombres consecutius aleshores els podrem fer tots sumant múltiples de 2. Ho fa per a 6 i 7. Diu també que no podem fer els 1, 3 i 5, llevat de si tornem canvi. Dóna una regla general: els nombres triats com a monedes no han de tenir divisors comuns; per exemple si agafem monedes de 4 i de 6, el màxim comú divisor és 2 i només podrem aconseguir nombres parells.

Dimensió comunicació i representació

Les matemàtiques aporten un llenguatge formal que, a més del mateix coneixement matemàtic, ens procura eines per a la comprensió del nostre entorn. Atesa la complexitat i el potencial de creixement d'aquest llenguatge, per integrar la comunicació de forma eficaç en el procés d'aprenentatge de les matemàtiques calen emissors i receptors actius. Les precisions, reelaboracions i validacions dels processos d'anàlisi o de generalització es veuen afavorides per la comunicació continuada al llarg del temps.

La pràctica habitual de l'expressió d'idees matemàtiques entre companys, tant oralment com per escrit, ajuda els estudiants a organitzar i refinar aquestes idees, i a ser clars, convinents i precisos en l'ús del vocabulari i dels símbols matemàtics. L'escolta atenta dels arguments dels companys proporciona oportunitats de reflexió i millora del propi coneixement.

Les converses que sorgeixen en l'exploració d'idees matemàtiques des de perspectives diverses permeten reafirmar el pensament propi, ser conscient del que se sap i establir connexions. L'alumnat ha de combinar el llenguatge simbòlic i formal amb el llenguatge natural, fins a arribar a traduir de l'un a l'altre i incorporar el vocabulari matemàtic al llenguatge habitual.

La representació és una eina per construir, estructurar i comunicar idees matemàtiques. La comunicació matemàtica, des dels esbossos més simples fins al llenguatge simbòlic més elaborat, sempre implica representació. Les múltiples varietats de representació (dibuixos, esquemes, construccions amb materials manipulables, taules, gràfics, símbols, recursos TIC) proporcionen, a més de diverses possibilitats de mostrar idees matemàtiques, diferents vies d'aproximar-se a aquestes idees, d'organitzar-les i de comprendre-les. Un bon indicador del grau de comprensió d'una idea matemàtica és la capacitat de relacionar les diferents representacions d'aquesta idea i triar la forma de representació més adequada a la situació i propòsit plantejat.

El professor ha de fer present la comunicació amb matemàtiques i sobre matemàtiques en el dia a dia a l'aula, propiciant la interacció entre alumnes en relació amb la resolució de problemes, les conjetures, les experimentacions, les relacions entre conceptes, les generalitzacions... L'alumnat ha de parlar de matemàtiques, escoltar i llegir reflexions i propostes matemàtiques, i escriure matemàtiques, aprofitant el potencial de les diverses formes de representació, des de les més informals fins a les més estructurades, fins a arribar, de manera progressiva, al llenguatge simbòlic.

Aquesta dimensió està integrada per quatre competències:

- **Competència 9.** Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.
- **Competència 10.** Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.
- **Competència 11.** Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.
- **Competència 12.** Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

COMPETÈNCIA 9

Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic

Explicació

Les formes de representació de conceptes i relacions matemàtiques, enteses en el sentit més ampli, són necessàries per a la comunicació matemàtica. Els alumnes poden generar noves formes de representació o versions de les estàndards que el professorat proposa. La representació ha de permetre plasmar:

- Conceptes matemàtics (per exemple, l'expressió d'una recta).
- Relacions entre conceptes (per exemple, una fracció pot representar una mesura, una probabilitat o una proporció, cosa que apropa aquests conceptes).
- Els procediments algorísmics o els de resolució de situacions (per exemple, un arbre en un problema de combinatòria).

Les representacions tenen diferents nivells d'abstracció, des de les més concretes, com ara un dibuix o un esquema, fins a les més genuïnament matemàtiques, com ara els símbols, les taules, les figures geomètriques i els gràfics. En alguns casos, una representació d'alguna situació matemàtica pot prendre diferents formes i el pas de l'una a l'altra o l'elecció de la més adequada en cada cas fa avançar cap a la seva resolució.

El llenguatge i el càlcul algebraic, la representació de funcions, la representació de figures en dues i tres dimensions amb les seves característiques i propietats i el treball amb dades, taules i gràfics estadístics són continguts del currículum que tenen un gran potencial en el desenvolupament d'aquesta competència.

La gradació de la competència s'ha fet atenent a la diversitat i conveniència de les representacions, així com a la capacitat d'usar-les per treballar matemàticament.

Gradació

- 9.1.** Interpretar i construir representacions de conceptes o relacions matemàtiques vinculades a situacions concretes.
- 9.2.** Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres, ser capaç de comprendre les representacions dels altres i valorar la més adequada en cada situació.
- 9.3.** Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres, ser capaç de comprendre les representacions dels altres i emprar els canvis de representació com a estratègia de treball matemàtic.

Continguts clau

- Llenguatge i càlcul algebraic.
- Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.
- Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.
- Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.
- Dades, taules i gràfics estadístics.

Orientacions metodològiques

En matemàtiques, la representació és el punt de partida per poder entendre un problema, una relació, un conjunt de dades... També té un paper fonamental en l'adquisició progressiva dels conceptes. Inicialment, la representació acostuma a ser mental i de mica en mica es va elaborant fins a arribar a ser un element de comunicació.

Al principi els alumnes acostumen a utilitzar les representacions que els són més entenedores i progressivament cal aconseguir el pas a representacions més genuïnament matemàtiques. Aquest pas moltes vegades no es dona de manera espontània, cal una planificació per part del professor. Llevat de les vegades en què l'alumne hi hagi pogut arribar pel seu compte, cal buscar el moment per poder introduir els diferents tipus de representació:

- La recta real i les coordenades cartesianes.
- Taules de dades.
- Gràfics de diferents tipus: funcionals, estadístics...
- Diagrames d'arbre.
- Dibuixos de figures planes.
- Models, desenvolupaments plans, seccions i vistes de figures tridimensionals.
- Equacions, inequacions i sistemes.

Gairebé totes les activitats ens permeten desenvolupar aquesta competència. De totes maneres algunes són més riques que d'altres. Podem proposar-nos: situacions geomètriques amb un programa de geometria dinàmica, resolució de problemes al voltant d'activitats com ara el Fem Matemàtiques, el +Mates, el Cangur..., l'ús de mitjans de comunicació per comentar, criticar, interpretar representacions gràfiques de la informació, la gestió de dades i taules amb un full de càlcul, l'ús de material manipulatiu o la seva construcció per poder resoldre un problema.

Aquestes tasques es poden dur a terme treballant per parelles o en grups per:

- Solucionar conjuntament una situació i enriquir el procés.
- Entendre la representació i la solució que proposen els altres.
- Debatre la correcció, l'equivalència, l'adequació de diverses representacions d'una mateixa situació.
- Realitzar una coavaluació de les representacions que s'han utilitzat i prendre consciència de com anem aprenent.

És interessant per a l'adquisició de la competència, que el professor tingui el paper de provocar, mitjançant preguntes als alumnes, la comprensió dels diferents tipus de representació, del pas de l'una a l'altra, ajudar-los a apreciar els matisos associats a cada representació, ajudar-los a prendre consciència dels seus progressos en l'elaboració de noves representacions, en la comprensió de les representacions dels companys i en la capacitat d'anar canviant d'un tipus de representació a un altre.

És especialment important la gènesi de la idea de variable i de representació algebraica que ha de seguir un procés gradual en el qual convé no estalviar etapes. Hi poden contribuir les activitats següents:

- La traducció a expressions simbòliques de petits enunciats amb quantitats indeterminades i a l'inrevés.
- La traducció a expressions simbòliques de relacions mètriques (longitud, perímetre, àrea) en figures geomètriques i a l'inrevés.
- La traducció a expressions simbòliques de diagrames geomètrics que descriu situacions concretes.
- Les generalitzacions d'expressions aritmètiques a les corresponents expressions algebraiques usant jocs, problemes, etc.

- L'ús de metàfores: caixes per a les indeterminades/incògnites/variables; balances per a les equacions i ine-quacions; màquines per a les funcions i per a les equacions.
- L'ús de full de càlcul o de programes que relacionen expressions algebraiques amb objectes geomètrics.
- La traducció sistemàtica entre les diverses representacions de les funcions.

Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència es poden proposar situacions en què calgui fer canvis de representació, per exemple: de taules a gràfiques o viceversa; de fracció a decimal o a l'inrevés; d'un rectangle o quadrat a una expressió algebraica; d'un diagrama a una expressió aritmètica o algebraica..., de manera que es puguin deduir patrons, relacions, formes...

Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència, poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
Representa una situació correctament.	Representa una situació de diverses maneres.	Veu la relació, l'equivalència entre dues representacions donades.
Explica la seva representació.	Valora la representació més adient per a una situació donada.	Canvia de representació per a millorar en el procés de resolució.
Comprèn i extreu informació d'una representació donada.	Utilitza amb naturalitat representacions genuïnament matemàtiques.	Utilitza amb naturalitat representacions matemàtiques més complexes.
Utilitza representacions matemàtiques simples.	Interpreta expressions algebraiques.	Justifica el criteri amb què escull una o una altra representació.
Interpreta gràfics estadístics i funcionals.	Entén les representacions dels altres.	(...)
(...)	(...)	

A continuació s'ofereix un exemple d'activitat d'avaluació de la competència:

Cinc equips de futbol sala juguen un campionat a doble volta.

a) Quants partits hi haurà?

b) Si el campionat fos de tots contra tots en camp neutral, quants partits es disputarien?

c) Quans partits tindrien lloc si hi haguessin n equips en el campionat?

Mostra quina estratègia has seguit per trobar el nombre de partits en cada cas.

Si l'alumne és capaç de construir una representació per al problema, sigui a través d'una taula de doble entrada, un arbre..., tindriem una resposta de nivell 1.

Si, a més, és capaç de deduir les propietats i regularitats de la representació utilitzada per calcular el nombre de partits, d'observar que no és possible la repetició d'elements, representar-ho de diverses maneres valorant la millor per a la situació plantejada i comprenent la proposta dels altres, la resposta seria de nivell 2.

Si l'alumne és capaç de canviar d'una representació a l'altra, de passar de l'arbre a l'arbre "podat" o de la taula a la taula "retallada" quan deixa de ser important l'ordre en els partits, estaríem en un grau d'adquisició de nivell 3. Igualment, també estaríem en una resposta de nivell 3 si l'alumne és capaç de deduir o d'utilitzar fórmules combinatòries, com les variacions ordinàries o les combinacions.

COMPETÈNCIA 10

Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres

Explicació

L'alumnat ha de ser capaç d'expressar i comprendre idees matemàtiques tant oralment com per escrit. Expressar idees matemàtiques comporta la capacitat de descriure (el què), d'explicar (el perquè), de justificar (el perquè del perquè), d'interpretar (jo crec que...), d'argumentar (és així perquè...). Aquesta expressió cal que sigui clara, és a dir, que s'entengui i sigui precisa, que s'utilitzi un llenguatge adequat amb els termes pertinents.

En un primer estadi, la comunicació d'idees matemàtiques pot ser en llenguatge verbal, però a mesura que es va avançant en el procés s'afegeix l'ús del llenguatge matemàtic, és a dir, les formes de representació pròpies de les matemàtiques com ara els símbols, els gràfics, les figures, les taules, els esquemes... L'assoliment d'aquesta competència es culmina quan, de manera natural en la vida quotidiana, s'utilitza la terminologia matemàtica apresada.

Alguns continguts del currículum especialment apropiats per desenvolupar aquesta competència són: els nombres i les operacions, el llenguatge i el càlcul algebraic, la representació de funcions, la representació de figures en dues i tres dimensions amb les seves característiques i propietats, les relacions i transformacions geomètriques, el treball amb dades, taules i gràfics estadístics i la probabilitat.

La gradació dels tres nivells d'adquisició de la competència s'ha fet en funció del llenguatge utilitzat: des de l'ús de terminologia matemàtica, passant per l'ús de formes de representació pròpies, fins a l'ús del llenguatge matemàtic i la incorporació de la terminologia matemàtica al llenguatge habitual.

Gradació

- 10.1.** Expressar i comprendre idees matemàtiques en llenguatge verbal (oral i escrit) fent un ús correcte de la terminologia matemàtica.
- 10.2.** Expressar i comprendre idees matemàtiques en llenguatge verbal (oral i escrit) fent un ús correcte de la terminologia i les formes de representació pròpies de les matemàtiques (símbols, gràfics, figures, taules, esquemes, etc.).
- 10.3.** Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió fent ús del llenguatge matemàtic i comprendre les expressades pels altres. Incorporar terminologia matemàtica al llenguatge habitual.

Continguts clau

- Sentit del nombre i de les operacions.
- Llenguatge i càlcul algebraic.
- Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.
- Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.
- Relacions i transformacions geomètriques.
- Dades, taules i gràfics estadístics.
- Sentit i mesura de la probabilitat.

Orientacions metodològiques

El llenguatge matemàtic (verbal, algèbric, gràfic, geomètric...), amb l'ús de terminologia adequada, permetrà expressar i comprendre les idees que es van descobrint, els conceptes que es van coneixent i els processos de resolució que es van elaborant.

Tanmateix, la claredat i precisió en l'expressió d'idees matemàtiques requereixen un procés d'aprenentatge gradual que pot ser diferent atenent a les característiques de l'alumnat i al context d'aprenentatge. Per afavorir aquest procés, el professor proposarà algunes activitats, com ara:

- Interioritzar una situació matemàtica i explicar-la amb les pròpies paraules.
- Donar una argumentació del que s'ha fet per resoldre una situació.
- Contextualitzar i enunciar amb les pròpies paraules la resposta o solució de l'activitat que es proposa.
- Treballar en grup i generar situacions de diàleg que afavoreixin l'expressió, la comprensió i la millora d'arguments matemàtics.
- Discutir i reelaborar conjuntament resolucions de problemes poc clares o poc precises.

És interessant, per a l'adquisició de la competència, que el professor acompanyi el procés amb preguntes que ajudin a descriure (què és això?), explicar (per què passa?), justificar (per què passa això?), interpretar (què creus que passa?) i argumentar (quins arguments donaries per defensar això?). També convé ajudar a descobrir els passos del procés de resolució i quines expressions són més precises en l'ús d'un llenguatge matemàtic adequat.

El professor aprofitarà el treball matemàtic per anar introduint els diversos tipus de textos que són propis de les matemàtiques, com ara:

- Textos descriptius:
 - Descriure el procés que s'ha seguit per resoldre un problema.
 - Resumir el contingut d'una informació rellevant.
 - Definir un determinat concepte.
- Textos justificatius o argumentatius:
 - Explicar com s'ha fet una construcció.
 - Argumentar la validesa d'una conjectura.
 - Justificar la resposta a un problema.
- Textos instructius:
 - Explicar com es fa una construcció.


Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència, cal proposar activitats que facilitin que l'alumne pugui expressar idees matemàtiques en diferents llenguatges i en diferents graus de precisió, com ara interpretar un text que combini llenguatge verbal amb llenguatge matemàtic, definir en llenguatge verbal, que inclogui terminologia matemàtica, un concepte o relació, explicar un procés de construcció d'una figura o d'aplicació d'un algorisme.

Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència, poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
<p>Comprèn les produccions comunicatives dels companys.</p> <p>Exposa oralment de manera clara.</p> <p>Exposa oralment de manera precisa.</p> <p>(...)</p>	<p>Utilitza correctament les formes de representació pròpies de la matemàtica adequades a la situació.</p> <p>Fa un ús correcte de la terminologia matemàtica.</p> <p>Exposa de manera clara i precisa amb la terminologia adequada.</p> <p>(...)</p>	<p>Incorpora terminologia matemàtica al llenguatge habitual.</p> <p>Fa ús del llenguatge matemàtic.</p> <p>Comprèn els companys en l'expressió d'idees matemàtiques.</p> <p>(...)</p>

A continuació, s'ofereix un exemple d'activitat d'avaluació de la competència:



Mentre sopen, la Laila explica que coneix una pizzeria on fan pizzes quadrades i també pizzes hexagonals. Els altres no s'ho creuen i la Laila, per demostrar que no s'ho ha inventat, busca el web i mostra l'anunci als altres.

Si no t'agraden gaire les vores, quina pizza has de demanar?

La resolució del problema passaria per observar que tenim 3 figures planes: una circumferència, un quadrat i un hexàgon regular i que el problema relaciona tres magnituds al voltant de les pizzes: el preu, el perímetre i l'àrea.

Si l'alumne argumenta l'elecció de la pizza de manera correcta, després de calcular la vora, potser amb un cert grau d'ambigüitat i fins i tot sense parlar de perímetre i sense utilitzar la fórmula de càlcul del perímetre, mostraria un nivell 1 d'adquisició de la competència.

Seria també de nivell 1 la resposta que observa que la pizza circular és la que té menys vora i la quadrada la que en té més.

Si l'argumentació es dona de manera clara i precisa en la majoria d'aspectes, utilitzant el perímetre, l'àrea i el preu de les pizzes i els càlculs es desenvolupen utilitzant les fórmules pròpies del càlcul d'àrees i perímetres, es mostraria una resposta de nivell 2 d'adquisició de la competència. Podríem tenir una resposta que descartés l'hexagonal, atès que té més vora que la circular però menys àrea de pizza.

Si en la resposta s'utilitzen de manera precisa els termes de preu, perímetre i àrea de les pizzes per justificar l'elecció d'una manera clara, i si l'alumne és capaç de comprendre i validar o desestimar una resposta diferent a la seva donada per un company, es faria evident un grau d'adquisició de la competència de nivell 3.

COMPETÈNCIA 11

Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques

Explicació

La comunicació és fonamental en el procés de construcció col·lectiva del coneixement així com en la transmissió de les idees ja elaborades.

Quan s'ha entès un concepte matemàtic o s'ha superat el repte de resoldre un problema, s'ha de ser capaç de presentar la solució en públic i oferir-ne una explicació o justificació. Per fer-ho, cal:

- Construir i comunicar explicacions i arguments en el context propi de la situació o del problema, tot reflexionant sobre el procés i la solució.
- Identificar i criticar els límits del model utilitzat i el seu grau de precisió.
- Generar preguntes que permetin avançar en el procés de construcció i ampliació del pensament matemàtic.

Aquesta competència requereix una participació personal directa i activa, però és amb la cooperació, l'ajuda mútua i el treball en equip com s'arriba a cotes més altes en la construcció del coneixement. La interacció necessària per al treball col·laboratiu es veu reforçada per les possibilitats de comunicació i compartició que facilita la tecnologia web i els entorns virtuals d'aprenentatge.

El sentit del nombre i de les operacions, el llenguatge i el càlcul algebraic, la representació de funcions, les relacions i transformacions geomètriques, els mètodes estadístics o el sentit de la probabilitat són continguts clau per construir i comunicar coneixement.

La gradació de la competència respon als criteris següents: el rol que l'alumne assumeix en el treball col·laboratiu, la complexitat de les relacions entre les idees matemàtiques construïdes i la capacitat de construir coneixement matemàtic i de qualsevol altre àmbit a partir del pensament matemàtic.

Gradació

- 11.1.** Emprar la comunicació i el treball en equip com una forma de compartir idees matemàtiques.
- 11.2.** Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu com una forma de compartir, construir i organitzar idees matemàtiques.
- 11.3.** Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu com una forma de compartir, construir i estructurar coneixement de qualsevol àmbit a partir d'idees matemàtiques.

Continguts clau

- Sentit del nombre i de les operacions.
- Llenguatge i càlcul algebraic.
- Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.
- Relacions i transformacions geomètriques.
- Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.
- Sentit i mesura de la probabilitat.

Orientacions metodològiques

En tots els àmbits de la vida quotidiana en general, i de l'acadèmica en particular, la comunicació i el treball en equip hi són cada vegada més presents. Pel que fa a la competència matemàtica, aquest fet es tradueix en la capacitat de comunicar les idees matemàtiques i els resultats obtinguts emprant recursos expressius que incorporin els diferents llenguatges i tècniques amb l'objectiu d'avançar en la construcció col·lectiva del coneixement entorn de les matemàtiques.

L'objectiu principal d'aquesta competència és la construcció de coneixement, és per això que, a l'hora de comunicar i compartir un concepte, una idea o la resolució d'un problema, el professor hauria de vetllar perquè:

- La presentació sigui clara i contextualitzada (què s'ha fet? i en quines condicions?). Per això caldrà articular les idees amb eficàcia, utilitzar les habilitats de comunicació: oral, escrita, visual, digital, etc.; emprar diferents mitjans i tecnologies: presentacions interactives, cossos geomètrics, maquetes, fotografies, *applets* o qualsevol altre element que faciliti la comprensió d'allò que es vol comunicar.
- Les explicacions siguin argumentades (com s'ha fet?). Atès que la resolució d'un problema no és única o que la demostració d'una propietat es pot fer de diverses maneres, caldrà justificar l'opció escollida i explicar i raonar el procés seguit.
- Els resultats s'interpretin en el context de la situació o del problema (té sentit el que s'ha fet?). Cal ser crític amb les solucions, un resultat pot ser vàlid en un context i no ser-ho en un altre.
- Es facin propostes d'aplicació, d'ampliació i de millora (a què dona resposta? Es pot generalitzar?). A més a més de donar respostes, és molt important plantejar preguntes perquè aquest és un camí que mena a la construcció de coneixement.

En el treball col·laboratiu els participants treballen junts per assolir un objectiu global, l'èxit d'un projecte col·laboratiu depèn en bona part d'una adequada planificació prèvia que prevegi els objectius, els continguts, el material de què es disposa, la distribució temporal, la metodologia que s'aplicarà i els criteris d'avaluació. És per això que el professor:

- Potenciarà les relacions interpersonals. Crear un ambient de confiança i col·laboració és el primer pas per aconseguir un treball col·laboratiu eficaç.
- Formarà grups de treball heterogenis, ja que aquest és un factor d'aprenentatge i desenvolupament que afavoreix la inclusió. En tots els casos serà enriquidor l'intercanvi d'aportacions i les interaccions entre els diferents grups.
- Conscienciarà els membres del grup perquè assumeixen la seva part de responsabilitat en l'execució de les tasques comunes, però també la responsabilitat individual per aconseguir l'objectiu comú, de manera que l'abast final de la meta concerneixi tothom.
- Afavorirà les habilitats comunicatives: fer aportacions, aprofitar el valor de les aportacions fetes per fer nous plantejaments, crear ambient de conversa (preguntar, escoltar, argumentar, contrastar, conjecturar...).
- Farà el seguiment del procés, ja que l'objectiu és la tasca i l'aprenentatge. Per això calen normes clares, definides prèviament, i un control sistemàtic per al qual poden ser útils les taules de registre.
- Utilitzarà les tecnologies de la informació i de la comunicació (TIC) per superar les limitacions de temps i d'espai. Els entorns virtuals d'aprenentatge, com per exemple el Moodle, faciliten el treball col·laboratiu, ja que integren en un mateix entorn recursos com el wiki, el glossari, el fòrum o el blog.

La persona que aprèn construeix el coneixement sobre la base de posar en comú les seves idees amb altres persones amb qui les contrasta i, per mitjà de la participació en el diàleg, aconsegueix aprehendre. La construcció de coneixements matemàtics partirà dels coneixements ja adquirits, preferentment farà referència a un context proper. Tot recolzant-se en la col·laboració amb els companys i les companyes, sota el guiatge del professor, s'anirà ampliant i estenent a altres àmbits més enllà de les matemàtiques.

Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència és necessari plantejar activitats en grup. Cal tenir en compte que el professor necessitarà diverses sessions per poder avaluar tots els alumnes. L'avaluació tindrà un doble paper: com a mecanisme de verificació de coneixements i com a estímul d'aprenentatge. Tot i que la part més substancial de l'avaluació la fa el professorat, es poden utilitzar l'autoavaluació i la coavaluació especialment en les activitats de treball col·laboratiu.

Les activitats poden ser resolució de problemes contextuals, activitats manipulatives, de formulació de conjectures, el treball per projectes, plantejar un problema a través d'un fòrum en el qual tothom pugui col·laborar en la resolució, aportar solucions diferents i fer noves propostes, l'ABP (aprenentatge basat en problemes o projectes), les caceres del tresor o les webquestes. En general seran adequades aquelles activitats en què calgui experimentar o simular.

Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
Comunica correctament els resultats de les tasques realitzades. Es responsabilitza d'allò que té explícitament assignat en el seu grup de treball. Té una relació correcta amb els membres del grup i participa en els debats de treball. Usa mitjans diversos per comunicar i construir coneixement (murals, entorns virtuals, maquetes...) (...)	Fa el que li toca en el treball de grup i col·labora aportant coneixements i respostes a les preguntes formulades per la resta de membres de l'equip. Afavoreix les relacions interpersonals en el grup, participa activament en les discussions de treball, col·labora i dinamitza l'equip. Usa i gestiona mitjans diversos per comunicar i construir coneixement. (...)	Comunica el treball amb el suport dels recursos apropiats, explica, raona i justifica el procés escollit, interpreta els resultats i fa propostes d'ampliació i d'aplicació. Col·labora en el treball de l'equip aportant idees i estratègies amb la intenció de construir coneixement. Afavoreix les relacions interpersonals i entre els diferents grups, genera noves discussions de treball, dinamitza i lidera l'equip. Usa i gestiona, per pròpia iniciativa, mitjans diversos per comunicar i construir coneixement. (...)

A continuació s'ofereix un exemple d'activitat d'avaluació de la competència:

Activitat en dues fases: en la primera, s'experimenta i es recullen dades; en la segona, s'analitza la situació i es comunica.

Experimentar aquest joc: dos jugadors A i B juguen als daus de la forma següent: posen 9 fitxes al mig i tiren els dos daus. Sumen les puntuacions obtingudes entre les dues cares. Si la suma és 2, 3, 4, 5, 10, 11 o 12, el jugador A pren una fitxa de la pila. Si la suma és 6, 7, 8 o 9, el jugador B pren una fitxa de la pila. Guanya el primer jugador que reuneixi cinc fitxes.

Es juga per parelles i cada grup necessitarà dos daus, nou fitxes, fulls de recollida de resultats i un full de càlcul. Els resultats de cada partida s'enregistren en un full preparat per a aquesta finalitat. S'anota el nombre de partides que ha guanyat cada jugador. Es comparen els resultats amb els obtinguts per les altres parelles. Es fa el recompte de les sumes obtingudes en totes les partides en un altre full. En un full de càlcul preparat per introduir els resultats de cada parella s'ajunten els resultats de tota la classe:

Full de recomptes totals												
Taula de freqüències de cada suma												
Suma	Recompte								Freqüència absoluta	Freqüència relativa	Percentatge %	
	Freqüències de cada parella											
2	1	3	2	2	0	1	3	2	14	0.02	2.00	
3	10	4	4	7	7	5	4	6	47	0.07	6.71	
4	4	10	7	6	9	9	11	8	64	0.09	9.14	
5	13	11	9	11	10	4	11	8	77	0.11	11.00	
6	13	14	9	7	9	8	9	16	85	0.12	12.14	
7	18	18	10	14	15	8	12	12	107	0.15	15.29	
8	21	16	13	14	11	11	9	6	101	0.14	14.43	
9	18	6	8	5	8	16	8	10	79	0.11	11.29	
10	7	14	12	5	8	8	8	2	64	0.09	9.14	
11	5	5	5	6	3	6	3	4	37	0.05	5.29	
12	0	9	1	3	0	4	2	6	25	0.04	3.57	
	110	110	80	80	80	80	80	80	700	1	100	

Amb les dades recollides, cada grup haurà de realitzar les activitats següents:

- Fer un diagrama que representi els resultats obtinguts per tota la classe.
- Calcular la probabilitat d'obtenir cada una de les onze sumes possibles.
- Raonar si es tracta d'un joc equitatiu o no.
- Inventar un joc equitatiu en què intervingui la suma de les puntuacions dels dos daus.
- Presentar els resultats de la recerca a la resta de la classe.

La participació de l'alumne en aquesta activitat es considerarà de nivell 1 si ha col·laborat activament en cada una de les fases de l'experiència (obtenció i recull de dades, elaboració de taules i gràfics, càlcul de la probabilitat de guanyar de cada jugador i disseny d'un joc equitatiu) i ha presentat correctament el treball en format paper o en format digital.

La participació de l'alumne en aquesta activitat es considerarà de nivell 2 si ha intervingut activament i ha fet aportacions que han ajudat els companys a entendre, clarificar i avançar en la realització del treball. Ha observat la connexió entre freqüència relativa i probabilitat, sap quan un joc és equitatiu i, per tant, és capaç d'inventar-ne algun. A més a més, ha fet una presentació acurada del treball, amb activitats de comprovació experimental dels resultats obtinguts, sigui tirant els daus o utilitzant algun recurs digital de simulació.

Es considerarà que la participació de l'alumne en aquesta activitat ha estat de nivell 3 quan, a més de participar activament en totes les fases de l'experiència, ha pres la iniciativa, ha donat respostes, ha plantejat preguntes i ha aportat idees, que han permès aprofundir en el coneixement de l'estadística i de la probabilitat. Ha demostrat la connexió entre freqüència i probabilitat, ha definit les característiques d'un joc equitatiu i n'ha proposat algun. Ha fet una presentació del treball centrada principalment en el contingut i acompanyada d'una elecció acurada del format.

COMPETÈNCIA 12

Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics

Explicació

La competència matemàtica està molt relacionada amb la capacitat d'emprar les tecnologies en general i la tecnologia informàtica en particular. Les tecnologies faciliten el càlcul i els processos repetitius, cosa que permet alliberar recursos cognitius per centrar-se en el contingut.

Transformar la informació en coneixement exigeix el domini de les destreses relacionades amb el raonament per cercar, organitzar, relacionar, analitzar, sintetitzar i fer inferències i deduccions. En definitiva, comprendre i integrar la informació en els esquemes previs del coneixement matemàtic amb criteris d'idoneïtat, tot valorant les seves potencialitats i limitacions. Aquesta competència requereix:

- Emprar eines de mesura, cercadors d'Internet, editors d'equacions i de diagrames.
- Usar calculadores i fulls de càlcul per treballar els continguts relatius al càlcul (mental, estimatiu, algorísmic i algebraic).
- Utilitzar programes per a la creació de gràfics estadístics i funcionals que, a més de millorar les representacions gràfiques, permeten la interactivitat i evidencien la connexió entre fórmula, taula i gràfic.
- Dominar programes de geometria dinàmica que facilitin l'estudi de les figures geomètriques de dues i tres dimensions: característiques, propietats i processos de construcció.

La gradació de la competència s'ha fet en funció dels criteris següents: varietat, complexitat i idoneïtat de les tecnologies escollides i gestió de la informació.

Gradació

- 12.1.** Usar tecnologies diverses per recollir informació matemàtica referent a situacions properes a l'alumnat i visualitzar idees o processos matemàtics.
- 12.2.** Usar tecnologies diverses per cercar, recollir, tractar i mostrar informació matemàtica referent a contextos propers i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.
- 12.3.** Seleccionar tecnologies diverses amb criteris d'idoneïtat, tot valorant les seves potencialitats i limitacions. Usar-les per gestionar informació i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

Continguts clau

- Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).
- Llenguatge i càlcul algebraic.
- Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.
- Anàlisi del canvi i tipus de funcions.
- Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.
- Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.
- Dades, taules i gràfics estadístics.
- Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.

Orientacions metodològiques

L'ordinador, la pissarra digital interactiva (PDI) o qualsevol altra de les tecnologies presents a l'aula, haurien de ser elements de millora, que permetin fer noves activitats i que facilitin les que ja es feien per altres mitjans. No es tracta de fer el mateix amb recursos diferents, sinó d'aprofitar les noves possibilitats per fer-ne un ús creatiu: treball col·laboratiu, tractament de la informació, simulacions, construccions geomètriques, ús d'*applets*, representacions gràfiques, càlcul numèric i algebraic, etc. L'objectiu és “fer matemàtiques”, amb aquest propòsit s'utilitzarà, en cada cas, l'ordinador i les tecnologies més adients.

L'apropiació d'un nou recurs no és immediata, ha de passar per un període d'aprenentatge, de prova i d'avaluació abans d'utilitzar-lo per a la finalitat per a la qual ha estat seleccionat. Al principi hi ha moltes coses que no se saben, que no s'entenen del tot, són dubtes que, a poc a poc, s'aniran resolent amb l'ús de l'eina. Per tant, la proliferació de recursos és un avantatge, però també pot ser un inconvenient. És per això que, abans d'incorporar un recurs, el professor haurà de valorar si:

- permet aprenentatges nous i significatius per a l'alumnat,
- s'adapta a diverses dinàmiques d'aula,
- permet agilitar les simulacions, les representacions gràfiques, els moviments en el pla, etc.,
- és accessible per a tothom i té un bon nivell de compatibilitat i d'implantació,
- és senzill d'aplicar a l'aula,
- es pot compartir i, per tant, facilita el treball col·laboratiu,
- facilita la cooperació entre diferents àrees disciplinàries,
- aprofita, si escau, el seu potencial multimèdia,
- en el cas de les TIC, és programari lliure, és una aplicació web 2.0 o necessita un servidor propi,
- en el cas de ser un recurs manipulatiu, és polivalent, és fàcil de construir, és transportable, calen exemplars per a tothom...

En resum, si aporta valor afegit respecte als recursos que ja s'utilitzaven s'adoptarà com una eina més, sense que això comporti l'abandonament automàtic d'alguna altra. Totes aquestes tecnologies seran efectives si van acompanyades d'un coneixement clar dels continguts matemàtics implicats; sense aquest coneixement només serviran per a tasques rutinàries. Es tracta d'ampliar el ventall de recursos, no de la substitució sistemàtica d'un recurs per un altre:

- La pissarra clàssica i la PDI poden conviure, tot i que la PDI aporta moltes més possibilitats, com per exemple: els recursos multimèdia, la capacitat d'enregistrar i emmagatzemar allò que s'hi representa o la possibilitat d'introduir noves metodologies de treball.
- La fotografia digital permet traslladar alguns exercicis o problemes al context propi de l'alumne. Es pot calcular l'angle d'inclinació de la torre de Pisa, però també l'altura de l'església del poble o la superfície que ocupa el centre on s'estudia.
- L'ús correcte de les calculadores i del full de càlcul millora la precisió, la rapidesa i la fiabilitat dels càlculs, facilita la simulació i les representacions gràfiques. Tot això, a més de facilitar la resolució d'exercicis d'aplicació directa, permet anar més enllà i plantejar-se un altre tipus de problemes, més contextuals, amb dades reals i amb resultats que cal interpretar i contrastar.
- El programari de disseny de xarxes conceptuals (anomenats mapes mentals i mapes conceptuals) és molt útil per visualitzar relacions i connexions, així com per estructurar idees o procediments matemàtics. En acabar un tema, es poden utilitzar per resumir-lo i, així, identificar, organitzar i relacionar els nous conceptes entre si i amb els que ja es tenien assolits.

- Les possibilitats per treballar l'àlgebra i la geometria que incorpora el GeoGebra permeten que es pugui utilitzar en gairebé tots els temes, amb objectius diversos: com a suport d'explicacions i presentacions, per a la resolució d'exercicis i problemes i com a entorn de simulació de determinats fenòmens.
- Amb els recursos manipulatiu físics (paper, cartró, filferro, plastilina, etc.) o digitals (*applets*) es poden fer simulacions (successos aleatoris), estimacions (comparació amb la unitat de mesura, escales, etc.), comprovacions (identitats notables), demostracions (teorema de Pitàgores), construccions (poliedres) i representacions gràfiques funcionals i estadístiques.
- Els entorns virtuals d'ensenyament i aprenentatge, com és el cas del Moodle, són un complement de la formació presencial. Faciliten la comunicació, el seguiment, l'exercitació (JClic, Quaderns Virtuals, HotPotatoes, qüestionaris...) i el treball cooperatiu i col·laboratiu a través de fòrums, wikis, bases de dades i glossaris.

Orientacions per a l'avaluació

Per avaluar aquesta competència, es poden proposar problemes que requereixin construccions geomètriques, físiques o amb programes de geometria dinàmica, o que la representació gràfica de les funcions i la seva interpretació hi tingui un paper fonamental; exercicis d'estadística descriptiva amb: treball de camp de recollida de dades, taules de freqüències, càlcul de paràmetres i representacions gràfiques; problemes en què calgui prendre mesures sobre el terreny; activitats manipulatives com ara construcció de figures i cossos geomètrics; fotografia matemàtica; simulacions; estimacions; activitats de síntesi, estructuració i resum de conceptes.

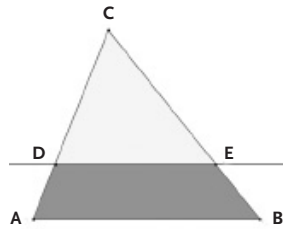
Per avaluar els diversos nivells d'assoliment de la competència, poden ser útils indicadors com els que s'ofereixen a continuació:

Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
Usa correctament les eines de mesura directa (regle, transportador, goniòmetre...) i domina els aspectes bàsics de l'ús de la calculadora. Utilitza correctament els editors de textos, d'equacions i gràfics. Domina els aspectes bàsics del full de càlcul, del GeoGebra i dels programes de representació gràfica. Elabora i interpreta correctament els gràfics funcionals i identifica les relacions entre els paràmetres de la fórmula i la gràfica de la funció. Organitza les dades en taules de freqüències, calcula els paràmetres estadístics, elabora i interpreta els gràfics estadístics. (...)	Usa correctament les eines de mesura directa i indirecta i les calculadores de qualsevol tipus. Mostra habilitat en l'ús del full de càlcul, del GeoGebra i dels programes de representació gràfica. Utilitza i interpreta els gràfics funcionals en contextos diversos. Calcula i interpreta els paràmetres estadístics, utilitza la representació gràfica més adient i en treu conclusions. (...)	Usa correctament les eines de mesura directa i indirecta i les calculadores de qualsevol tipus amb criteris d'idoneïtat. Domina el full de càlcul, el GeoGebra (és capaç de fer construccions geomètriques, simulacions, animacions...) i els programes per a l'elaboració de diagrames i gràfics funcionals i estadístics. Utilitza els gràfics funcionals per descriure i analitzar situacions de dependència. Interpreta aquests gràfics en el seu context. Usa l'estadística per analitzar situacions, treure conclusions i fer prediccions, emprant, en cada cas, les eines tecnològiques adients. (...)

A continuació s'ofereix un exemple d'activitat d'avaluació de la competència:

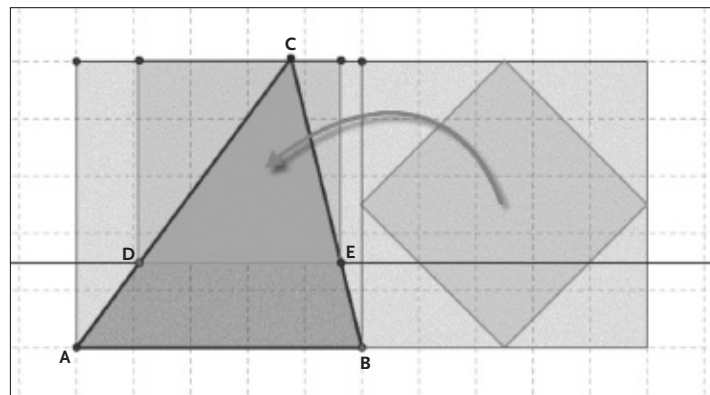
Donat un triangle ABC, com s'hauria de dibuixar una recta paral·lela a un costat del triangle perquè el divideixi en dues parts que tinguin la mateixa superfície?

Indicació: aquest problema es pot resoldre amb regla i compàs.



Un exemple de resposta de nivell d'adquisició 1 seria la d'un alumne que dibuixa un triangle qualsevol, sobre paper o amb l'ajut d'un programa d'edició gràfica o de geometria dinàmica. Pel mètode d'assaig i error aconseguix dibuixar la recta buscada comprovant que les superfícies dels dos polígons són iguals. A més, és capaç de raonar que els triangles ABC i DEC són semblants, que la raó de semblança de les seves superfícies és 2 i, per tant, que la raó dels costats és $\sqrt{2}$.

Un exemple de resposta de nivell d'adquisició 2 seria la d'un alumne que dóna una solució raonada, tot i que no es tracti d'una solució general. Per exemple, sobre un fons quadriculat dibuixa un triangle qualsevol, però és un cas particular perquè es pot inscriure en un quadrat. Observa a través d'un quadrat auxiliar que la superfície del quadrat obtingut unint els punts mitjos de cada costat és la meitat de la del quadrat gran i és capaç d'explicar que aquesta mateixa relació es dóna en els triangles corresponents.



La resposta d'un alumne se situarà en el nivell 3 d'adquisició d'aquesta competència si és capaç de fer una demostració vàlida per a tots els triangles utilitzant només el regla i compàs. També se situaria en el nivell 3 si és capaç de fer un raonament similar però utilitzant un programa de geometria dinàmica com, per exemple, el GeoGebra.

Annex 1

Continguts clau de les competències

Continguts clau	Competències											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. Sentit del nombre i de les operacions.	■			■	■	■	■			■	■	
2. Raonament proporcional.		■			■		■	■				
3. Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).		■	■		■							■
4. Llenguatge i càlcul algebraic.	■	■			■	■	■	■	■	■	■	■
5. Patrons, relacions i funcions.	■		■	■	■	■	■	■				
6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.		■							■	■	■	■
7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions.			■	■	■	■						■
8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.	■		■	■		■		■	■			■
9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.					■				■	■		■
10. Relacions i transformacions geomètriques.			■	■	■		■			■	■	
11. Magnituds i mesura.	■	■		■				■				
12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.		■				■	■					
13. Sentit de l'estadística.	■			■	■	■						
14. Dades, taules i gràfics estadístics.							■		■	■		■
15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.		■	■					■			■	■
16. Sentit i mesura de la probabilitat.	■			■	■	■		■		■	■	

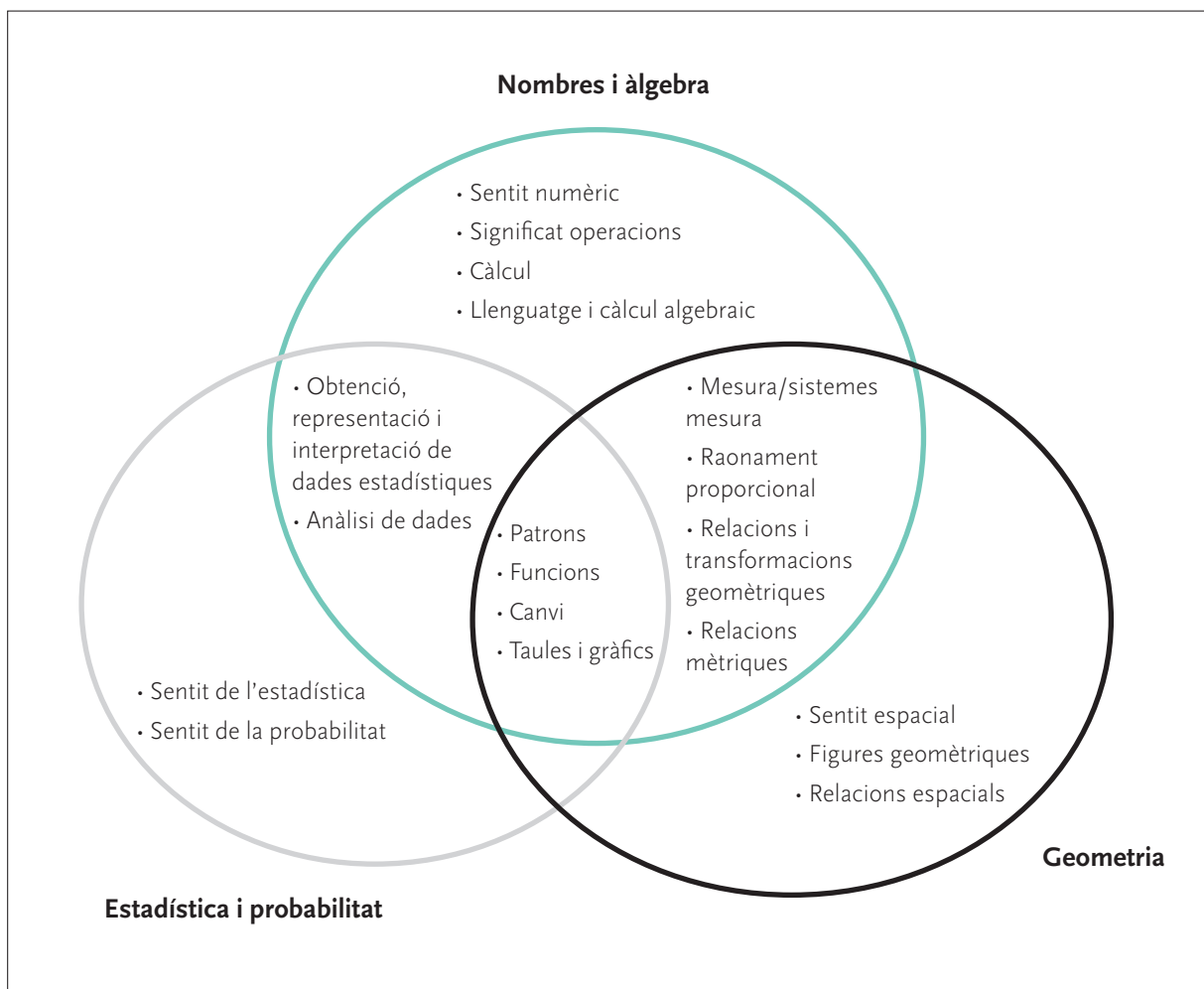
Annex 2

Relació entre dimensions a través de les competències

	Comunicació i representació	Connexions	Raonament i prova
Resolució de problemes	<p>1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.</p> <p>9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.</p>	<p>1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.</p> <p>4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.</p>	<p>2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.</p> <p>3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.</p> <p>6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.</p>
Raonament i prova	<p>5. Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.</p> <p>10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.</p> <p>11. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.</p>	<p>6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.</p> <p>7. Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.</p>	
Connexions	<p>8. Identificar les matemàtiques implicades en situacions quotidianes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.</p> <p>12. Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.</p>		

Annex 3

Connexions entre continguts clau



Annex 4

Correspondència entre els continguts clau vinculats a les competències i la formulació de continguts curriculars

Continguts clau	Continguts curriculars
1. Sentit del nombre i de les operacions.	<ul style="list-style-type: none"> • Nombres naturals i enters. • Fraccions. • Càlcul mental. • Nombres racionals i irracionals. • Nombres grans i nombres petits. • Successions numèriques.
2. Raonament proporcional.	<ul style="list-style-type: none"> • Fraccions. • Percentatges. • Càlcul mental. • Proporcionalitat directa i inversa. • Nombres racionals i irracionals. • Successions numèriques.
3. Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).	<ul style="list-style-type: none"> • Nombres naturals i enters. • Fraccions. • Càlcul mental. • Percentatges. • Nombres racionals i irracionals. • Nombres grans i nombres petits. • Successions numèriques.
4. Llenguatge i càlcul algebraic.	<ul style="list-style-type: none"> • Funcions lineals i funcions de proporcionalitat inversa. • Equacions de 1r grau. • Sistemes d'equacions de 1r grau. • Equacions de 2n grau. • Funció quadràtica i exponencial. • Funcions definides a trossos. • Equacions de grau superior o igual a 2. • Inequacions lineals.
5. Patrons, relacions i funcions.	<ul style="list-style-type: none"> • Patrons per expressar regularitats entre magnituds i quantitats. • Proporcionalitat directa i inversa. • Funcions generals (sense fórmula). • Funcions lineals i funcions de proporcionalitat inversa. • Equacions de 1r grau. • Sistemes d'equacions de 1r grau. • Equacions de 2n grau. • Funció quadràtica i exponencial. • Funcions definides a trossos. • Equacions de grau superior o igual a 2. • Inequacions lineals.

Continguts clau	Continguts curriculars
6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.	<ul style="list-style-type: none"> • Taules i gràfics per expressar relacions. • Funcions generals (sense fórmula). • Funcions lineals i funcions de proporcionalitat inversa. • Funció quadràtica i exponencial.
7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions.	<ul style="list-style-type: none"> • Funcions lineals i funcions de proporcionalitat inversa. • Equacions de 1r i 2n grau i sistemes d'equacions de 1r grau. • Funció quadràtica i exponencial. • Funcions definides a trossos. • Equacions de grau superior o igual a 2. • Inequacions lineals.
8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.	<ul style="list-style-type: none"> • Figures geomètriques de dues dimensions. • Figures i cossos geomètrics. • Proporcionalitat i semblança. • Trigonometria.
9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.	<ul style="list-style-type: none"> • Figures geomètriques de dues dimensions. • Eines i instruments. • Figures i cossos geomètrics. • Proporcionalitat i semblança. • Teoremes de Tales i de Pitàgores. • Trigonometria.
10. Relacions i transformacions geomètriques.	<ul style="list-style-type: none"> • Simetria. • Proporcionalitat i semblança en figures de dues dimensions. • Teoremes de Tales i de Pitàgores. • Proporcionalitat i semblança. • Transformacions geomètriques. • Trigonometria.
11. Magnituds i mesura.	<ul style="list-style-type: none"> • Unitats de mesura de magnituds, longituds, angles i d'àrees. • Longituds, perímetres i àrees de figures en dues dimensions. • Unitats de mesures d'àrees i volums. • Longituds, perímetres i àrees de figures planes. • Superfícies i volums de cossos de l'espai. • Mesures directes. • Mesures indirectes.
12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.	<ul style="list-style-type: none"> • Longituds, perímetres i àrees de figures en dues dimensions. • Unitats de mesures d'àrees i volums. • Superfícies i volums de cossos de l'espai. • Mesures directes. • Mesures indirectes.
13. Sentit de l'estadística.	<ul style="list-style-type: none"> • Estudis estadístics: mostres; variables discretes i contínues.
14. Dades, taules i gràfics estadístics.	<ul style="list-style-type: none"> • Estudis estadístics: recollida de dades; mostres; variables discretes i contínues. • Gràfics estadístics: diagrames de barres, de línies i de sectors; histogrames i polígons de freqüències.
15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.	<ul style="list-style-type: none"> • Eines d'anàlisi de dades: mesures de centralització i mesures de dispersió.
16. Sentit i mesura de la probabilitat.	<ul style="list-style-type: none"> • Conceptes bàsics de probabilitat: proporcionalitat i experiments aleatoris amb successos simples; successos i espai mostral; successos compostos.

Annex 5

Competències i nivells de gradació

Competències	Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.	1.1. Explicar l'enunciat d'un problema en llenguatge propi, valent-se de textos, dibuixos, esquemes o expressions aritmètiques.	1.2. Traduir un problema a llenguatge matemàtic utilitzant gràfics, expressions aritmètiques o expressions algebraiques senzilles.	1.3. Traduir i donar sentit a problemes formulats de maneres diverses (textos, imatges, objectes...) al llenguatge matemàtic, tenint en compte el significat de les dades.
2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.	2.1. Emprar estratègies i eines matemàtiques elementals per resoldre problemes.	2.2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes, explicant el procés i comprovant la raonabilitat de la solució.	2.3. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes, mantenint el control del procés, justificant-lo i comprovant la correcció i raonabilitat de la solució.
3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.	3.1. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema, provant altres propostes si la inicial no funciona.	3.2. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema, ser capaç d'assajar i discutir altres propostes en un entorn tant d'aprenentatge cooperatiu com individual.	3.3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema, redefinir i ajustar, si cal, les estratègies i ser capaç de discutir i valorar altres propostes, en qualsevol entorn d'aprenentatge.
4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.	4.1. Generar preguntes o problemes d'aplicació directa, parcialment coherents amb el context en què es plantegen, respectant i acollint algunes de les seves característiques.	4.2. Generar preguntes o problemes que impliquin connexions i que siguin coherents amb el context en què es planteja, respectant i acollint les seves característiques.	4.3. Generar preguntes o problemes que comportin generalització i que siguin coherents de manera idònia amb el context en què es plantegen.
5. Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.	5.1. Fer explicacions justificant afirmacions matemàtiques i aportant, si cal, proves numèriques i gràfiques per validar-les.	5.2. Emprar generalitzacions o concrecions, fer conjectures i comprovacions i identificar contraexemples per justificar o rebutjar afirmacions en matemàtiques.	5.3. Construir argumentacions matemàtiques emprant processos de recursió, inducció i deducció, expressar-les amb precisió i contrastar-les amb els altres.

Competències	Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.	6.1. Emprar el raonament matemàtic en entorns propers.	6.2. Emprar el raonament matemàtic en entorns propers i, en casos senzills, en altres disciplines.	6.3. Emprar el raonament matemàtic en altres disciplines i en la vida quotidiana de manera autònoma, reflexiva i crítica.
7. Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.	7.1. Usar relacions concretes entre conceptes matemàtics per analitzar situacions.	7.2. Usar les connexions entre els conceptes i procediments de les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions.	7.3. Usar les relacions entre les diverses parts de les matemàtiques, emprar el llenguatge matemàtic i aplicar idees transversals per analitzar situacions i per construir raonaments.
8. Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.	8.1. Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes emprant els coneixements i les representacions matemàtiques per descriure-les.	8.2. Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques, emprar els coneixements, les eines i la forma de treballar de les matemàtiques per descriure-les i analitzar-les.	8.3. Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques, emprar els coneixements, les eines i la forma de treballar de les matemàtiques per descriure-les i analitzar-les. I a l'inrevés, reconèixer estructures matemàtiques concretes en àmbits diferents.
9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.	9.1. Interpretar i construir representacions de conceptes o relacions matemàtiques vinculades a situacions concretes.	9.2. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres, ser capaç de comprendre les representacions dels altres i valorar la més adequada en cada situació.	9.3. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres, ser capaç de comprendre les representacions dels altres i emprar els canvis de representació com a estratègia de treball matemàtic.
10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.	10.1. Expressar i comprendre idees matemàtiques en llenguatge verbal (oral i escrit) fent un ús correcte de la terminologia matemàtica.	10.2. Expressar i comprendre idees matemàtiques en llenguatge verbal (oral i escrit) fent un ús correcte de la terminologia i les formes de representació pròpies de les matemàtiques (símbols, gràfics, figures, taules, esquemes, etc.).	10.3. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió fent ús del llenguatge matemàtic i comprendre les expressades pels altres. Incorporar terminologia matemàtica al llenguatge habitual.

Competències	Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
11. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.	11.1. Emprar la comunicació i el treball en equip com una forma de compartir idees matemàtiques.	11.2. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu com una forma de compartir, construir i organitzar idees matemàtiques.	11.3. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu com una forma de compartir, construir i estructurar coneixement de qualsevol àmbit a partir d'idees matemàtiques.
12. Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.	12.1. Usar tecnologies diverses per recollir informació matemàtica referent a situacions properes a l'alumnat i visualitzar idees o processos matemàtics.	12.2. Usar tecnologies diverses per cercar, recollir, tractar i mostrar informació matemàtica referent a contextos propers i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.	12.3. Seleccionar tecnologies diverses amb criteris d'adoneïtat, tot valorant les seves potencialitats i limitacions. Usar-les per gestionar informació i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

Annex 6

Portals de referència del Departament d'Ensenyament

Portal	Descripció	Adreça URL
XTEC	La Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya (XTEC) és la xarxa telemàtica del Departament d'Ensenyament al servei específic del sistema educatiu de Catalunya i ofereix els apartats següents: Recursos, Centres, Currículum i orientació, Comunitat, Formació, Projectes, Innovació, Serveis educatius, Atenció a l'usuari i La meva XTEC.	http://xtec.gencat.cat/ca/
ALEXANDRIA	Alexandria és una biblioteca de recursos desenvolupada pel Departament d'Ensenyament regida pel principi de cooperació que permet pujar alguns tipus de materials educatius digitals, com ara cursos Moodle, activitats per a PDI, entre d'altres, per facilitar la seva posterior localització i intercanvi.	http://alexandria.xtec.cat
ARC (aplicació de recursos al currículum)	Espai estructurat i organitzat que permet accedir a propostes didàctiques vinculades als continguts del currículum i que ajuden a avançar en l'exemplificació de les orientacions per al desplegament de les competències bàsiques.	http://apliense.xtec.cat/arc
ATENEU	Ateneu és l'espai que recull els materials elaborats per a les activitats formatives, recursos metodològics i documentals, eines per treballar a les aules, tutorials i material autoformatiu.	http://ateneu.xtec.cat/wiki/form/wikiexport/cmd/tac/cd-alumnat/index
EDU365	L'Edu365 és el portal del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya adreçat a l'alumnat de les escoles i instituts del país i les seves famílies, tot i que qualsevol usuari pot fer ús dels recursos que hi apareixen.	http://www.edu365.cat
MERLÍ	Merlí és el catàleg de recursos educatius digitals i físics de l'XTEC 2.0 del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, amb l'objectiu de proporcionar a la comunitat educativa un entorn de catalogació, indexació i cerca de materials didàctics.	https://sites.google.com/a/xtec.cat/merli
XARXA DOCENT 2.0	La Xarxa Docent és una xarxa social de docents i per als docents. Els objectius principals d'aquest espai d'acompanyament virtual són: 1. Oferir suport i acompanyament didàctic i pedagògic al professorat per a la incorporació de les TAC. 2. Oferir informació rellevant relacionada amb els aspectes docents i de gestió d'aula amb eines TIC i recursos digitals. 3. Compartir i difondre coneixements i experiències entre tots els docents participants. 4. Crear una comunitat de pràctica orientada a l'aprenentatge entre iguals.	http://educat.xtec.cat/

Altres referents

Portal	Descripció	Adreça URL
CESIRE-Creamat	La finalitat del CESIRE-Creamat és la de facilitar recursos als centres educatius i al professorat de les diferents etapes educatives no universitàries per aconseguir un millor assoliment i desenvolupament de les competències dels alumnes en l'àmbit matemàtic.	http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/
GeoGebra	GeoGebra és un programari lliure interactiu que combina geometria, àlgebra i càlcul. Té un ús primordialment educatiu, tant a l'escola primària com a la secundària o a la universitat. El Geogebra és un programa de geometria dinàmica que ha estat traduït a 50 llengües, a Catalunya pels membres de l'Associació Catalana de GeoGebra (ACG).-	https://www.geogebra.org/ http://acgeogebra.cat/
Aprenestadística	Aprenestadística és un portal desenvolupat per l'Institut d'Estadística de Catalunya (Idescat) amb la col·laboració del Departament d'Ensenyament. Conté un conjunt d'activitats (per a primària i per a secundària) per aplicar l'estadística utilitzant dades reals. Permet aprendre els conceptes estadístics i la interpretació de dades d'una manera clara i entenedora amb definicions i animacions que es recullen en els glossaris del portal.	http://aprenestadistica.idescat.cat/
PuntMat	PuntMat és un espai d'informació i divulgació d'activitats, materials i reflexions entorn de l'ensenyament de les matemàtiques a l'etapa obligatòria (des d'infantil fins a l'ESO). Vol ser una eina útil al servei dels docents a l'hora de preparar la feina. Conté activitats classificades per nivells educatius i pels cinc blocs temàtics del currículum.	http://puntmat.blogspot.com.es/
Illuminations	Illuminations és un projecte dissenyat pel National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Conté recursos basats en estàndards per a l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques equivalents a les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Inclou eines interactives per als estudiants i suport educatiu per als professors d'educació infantil, primària, secundària obligatòria i postobligatòria.	https://illuminations.nctm.org/
NRICH enriching mathematics	El Projecte NRICH, amb el suport de la Universitat de Cambridge, pretén enriquir les experiències matemàtiques de tots els alumnes. Per donar suport a aquest objectiu, els membres de l'equip treballen desenvolupant una àmplia gamma de tasques matemàtiques que es puguin incorporar en la pràctica quotidiana de l'aula. Conté activitats per a l'educació infantil, primària, secundària obligatòria i postobligatòria.	http://nrich.maths.org/
Freudenthal Institute. WisWeb	WisWeb és el lloc web de l'Institut Freudenthal, de la Universitat d'Utrecht, per a l'educació matemàtica de secundària (alumnes de 12 a 18 anys). El focus principal del portal són els <i>applets</i> , petites eines d'aprenentatge interactiu que els estudiants poden utilitzar per a diversos fins, com explorar una situació problemàtica, descobrir una representació o un concepte, construir i explorar objectes 3D o practicar una habilitat.	http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/

Annex 7

ARC (aplicació de recursos al currículum)

La creació, la cerca i la selecció de recursos és una pràctica habitual entre els docents i els centres educatius. En l'actualitat, es generen una gran quantitat d'activitats i materials diversos adreçats a les diferents etapes educatives.

El Departament d'Ensenyament, recollint aquesta realitat, posa a disposició dels docents l'aplicació de recursos al currículum (ARC), un espai estructurat i organitzat que permet accedir a propostes didàctiques vinculades als continguts del currículum i que ajuden a avançar en l'exemplificació de les orientacions per al desplegament de les competències bàsiques.

L'ARC és un espai al servei dels mestres i del professorat on es recullen propostes per enriquir la pràctica a l'aula i contribuir a la millora dels aprenentatges de l'alumnat. Ofereix activitats vinculades als continguts clau, que exemplifiquen orientacions metodològiques recollides en els documents de desplegament de les competències bàsiques. Aquestes activitats són fruit de l'expertesa dels docents que volen compartir la seva pràctica en forma de propostes didàctiques experimentades a l'aula.

Les propostes didàctiques, validades pel Departament d'Ensenyament, es presenten a l'ARC amb una breu explicació i una fitxa que conté la descripció detallada de la proposta, els objectius, els recursos emprats i les orientacions metodològiques.

Cada proposta de l'ARC mostra els continguts curriculars i les competències que s'hi desenvolupen, i la majoria de propostes incorporen documents adjunts, tant per al professorat com per a l'alumnat: guies didàctiques, rúbriques d'avaluació, quaderns de treball i altres tipus de materials. Aquests materials són variats pel que fa al format: documents de text, documents PDF, quaderns virtuals, materials per a pissarres digitals i altres formats.

L'ARC és un projecte col·lectiu en evolució que creix dia a dia a favor de l'èxit escolar. S'hi pot accedir des de l'adreça <http://apliense.xtec.cat/arc>