Treball de recerca

La teoria de grafs

Emma Amaro Velasco

Dirigit per Ana Redondo Salmerón

2n de Batxillerat, B

INS Torre Roja

Viladecans, 27 d’octubre de 2017

ÍNDEX

0. INTRODUCCIÓ 3

1. LA TEORIA DE GRAFS 5

1.1. Breu introducció: Euler i el problema dels ponts de Königsberg 5

1.2. Què és un graf? Definicions bàsiques 6

1.3. Caracterització dels grafs 10

1.3.1. Grafs simples i multigrafs 10

1.3.2. Digrafs 11

1.3.3. Grafs connexos i inconnexos 12

1.3.4. Grafs complets i incomplets 12

1.3.5. Grafs bipartits 13

1.3.6. Grafs plans 14

1.3.7. Homeomorfisme de grafs 16

1.3.8. Arbres 17

1.4. Grafs i matrius 18

1.4.1. Matriu d'adjacència 19

1.4.2. Matriu d'incidència 21

2. APLICACIONS DE LA TEORIA DE GRAFS 23

2.1. Geografia i ciències urbanes 23

2.1.1. Camins òptims 23

2.1.2. Xarxes de metro 34

2.2. Psicologia i sociologia 35

2.3. Tecnologia 37

2.3.1. Xarxes socials 37

2.3.2.. Quantes càmeres són necessàries per vigilar casa meva? 40

CONCLUSIONS 43

BIBLIOGRAFIA 44

0. INTRODUCCIÓ

Amb aquest treball de recerca intento fer una introducció simplificada que permeti endinsar-se de manera superficial però àmplia en els punts més rellevants de la teoria de grafs.

La teoria de grafs, com podrem veure de forma més profunda en el treball, és una branca matemàtica que estudia les propietats dels grafs, que donen informació sobre el tipus de connexió entre elements. Tot i que una de les aplicacions més notables que té avui dia la teoria de grafs és la ciència computacional, aquest treball se centra en la seva part matemàtica, ja que és aquest el camí que aspiro a seguir quan enfili a la universitat.

L’objectiu d’aquest treball ha estat fer un breu recorregut pels temes més importants d’una matèria de la qual no coneixia gairebé res però que, sense saber-ho, sempre m’ha envoltat. Quan vaig escollir la teoria de grafs com a idea central del meu treball, la meva primera impressió era la d’una qüestió interessantíssima però irremeiablement teòrica; tot un repte per a una composició suposadament formada per una part pràctica a part de l’obligatòria teoria. El que he anat descobrint, pàgina a pàgina, punt per punt, és que les aplicacions que ha tingut, té i tindrà a la nostra vida són innumerables.

El principal propòsit de la part teòrica d’aquest treball de recerca és cimentar la base necessària per a entendre sense dificultat tots els punts i procediments de la part pràctica. Comença amb una breu introducció al tema que ens permet conèixer el context que envolta l’origen de la teoria de grafs. Durant aquest apartat veurem què és exactament un graf, quins tipus de graf hi ha i de quines maneres es poden representar.

L’apartat pràctic gira entorn les nombroses aplicacions que té la teoria de grafs al món que ens envolta. Desafortunadament, una explicació a fons de totes les formes en què s’utilitzen els grafs resulta impossible, i per això m’he centrat en les que em semblaven més interessants. Veurem com podem aplicar els coneixements que hem adquirit a la part teòrica del treball als mapes de metro i a la psicopedagogia, passant per la forma més efectiva de passejar pel meu barri i arribant, fins i tot, a les xarxes socials.

i. LA TEORIA DE GRAFS

1.1. INTRODUCCIÓ: EULER I EL PROBLEMA DELS PONTS DE KÖNIGSBERG

La teoria de grafs es va originar amb el famós problema matemàtic dels **set ponts de Königsberg**. Königsberg, l'actual Kaliningrad, és una ciutat russa per la qual passa el riu Pregolya. Enmig del riu, dues grans illes estaven connectades entre elles i a les ribes mitjançant una estructura de set ponts en total.

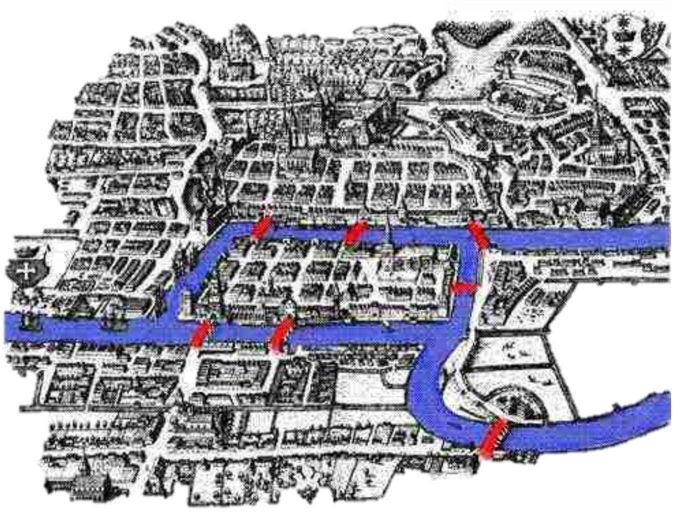


Figura 1: Disposició dels set ponts a la ciutat de Königsberg

Els habitants de la ciutat, per tal d'organitzar una desfilada, es van preguntar si era possible dibuixar un camí que recorregués els set ponts de manera que **només es passés un cop per cada pont.**

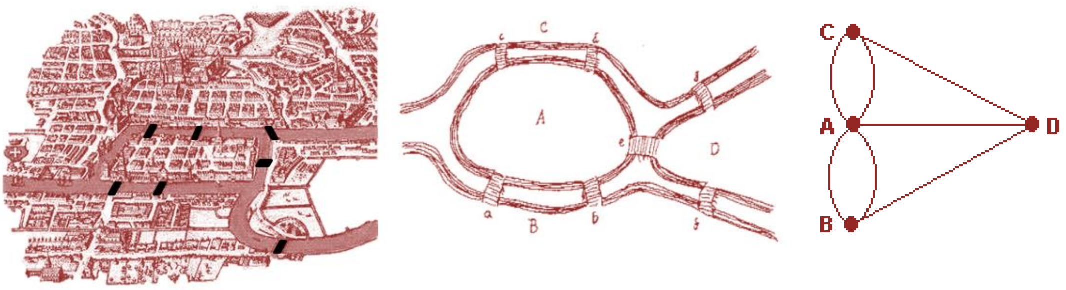


Figura 2: Evolució de la representació del problema dels set ponts de Königsberg segons Euler

El 1736, el matemàtic suís **Leonhard Euler** va demostrar que no era possible. Euler va trobar la solució representant de forma “abstracta” els elements més importants del problema: va substituir les illes i riberes per **punts** (vèrtexs, nodes), i els ponts per **camins** (branques, arestes) que els enllaçaven. El resultat forma l'estructura que s'anomena avui en dia **graf**.

Euler va adonar-se que la possibilitat de resoldre el problema depenia del **grau dels vèrtexs**. El grau d’un vèrtex és el nombre d’arestes que el connecten amb altres vèrtexs. En el problema dels set ponts de Königsberg, tres vèrtexs tenen grau 3, i un té grau 5. Euler va demostrar que el circuit que els ciutadans descrivien era possible si, i només si, hi havia dos vèrtexs de grau senar o si no hi havia cap. Un camí d'aquest tipus s'anomena **camí eulerià**. A més, si dos vèrtexs tenen grau senar, aquests han de ser el punt d'inici i final del camí eulerià. Per tant, com que el graf corresponent als ponts de Königsberg té quatre vèrtexs de grau senar, no pot tenir un camí eulerià.

Una altra forma del mateix problema demana un camí que passi per tots els ponts i també tingui el mateix punt d'inici i final. Un circuit així s'anomena un **circuit eulerià**. Existeix un circuit eulerià si, i només si, no hi ha vèrtexs de grau senar. Es pot veure que tots els circuits eulerians són també camins eulerians.

1.2. QUÈ ÉS UN GRAF? DEFINICIONS BÀSIQUES

Per poder entendre la utilitat de la teoria de grafs a la nostra vida primer hem d’entendre què és exactament un graf. En aquest punt donarem una definició general de graf i introduirem la terminologia amb la qual hem d’estar familiaritzats abans d’endinsar-nos en la teoria de grafs.

El concepte de graf es pot definir de dues maneres: **geomètricament** i **algebraicament**.

- ## Definició geomètrica:

Geomètricament, un graf G és un conjunt de punts en l'espai, alguns dels quals es troben units entre si mitjançant línies. Aquest graf pot representar moltíssimes situacions possibles a la vida real. Així i tot, un graf conté només **informació topològica**, és a dir, només conté informació sobre la connectivitat dels punts. Un graf no ens pot dir res sobre distàncies, angles... Per tant, aquestes dues figures, tot i semblar diferents, representen el mateix graf.

Figura 3

- ## Definició algebraica

Acabem de veure que un graf G és un conjunt de punts i de línies connectant algunes parelles de punts. Si volem formalitzar aquesta definició hem de recórrer a l'àlgebra; abans, però, hem d'anomenar certs conjunts del graf que són claus per entendre'l: el conjunt dels **vèrtexs**, V, i el conjunt de **costats**, E. Així, algebraicament, un graf G es defineix com un parell ordenat

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E}) = \big(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})\big)$$

on V és un conjunt no buit de punts de l'espai topològic, també anomenats vèrtexs, i E és un conjunt de parells no ordenats d'elements diferents a V, anomenats línies, costats o arestes. Que G sigui un parell ordenat significa que és una parella d'objectes matemàtics en la qual es distingeix un element de l'altre, i en el qual l'ordre d'aquests elements també forma part de la seva definició.

Si dos vèrtexs i i j estan units per una mateixa aresta, diem que són adjacents. Representarem aquesta aresta com a (i, j) o com a (j, i); l'ordre no importa perquè, com hem dit abans, E és un conjunt no ordenat. Podem dir que els vèrtexs i i j són vèrtexs veïns, que són els extrems del mateix costat o que són incidents a l'aresta (i, j). Dues arestes són adjacents quan tenen almenys un vèrtex comú.

GRAFS ETIQUETATS

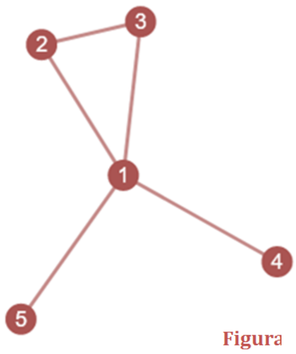


Figura 4

Per poder representar i analitzar un graf correctament és imprescindible que estigui etiquetat, és a dir, que els vèrtexs es diferenciïn entre ells donant-li un nombre o una lletra a cadascun.

Els grafs són molt utilitzats per representar xarxes de comunicació o transport; per tant, és important conèixer l'existència de **camins** que recorren tots els vèrtexs de forma més econòmica possible.

Un camí en un graf G és una seqüència en la qual s'alternen vèrtexs i arestes de G:

$$v_0 \to (v_0, v_1) \to v_1 \to (v_1, v_2) \to \cdots \to (v_{N-1)}, v_N) \to v_N$$

on cada costat té per extrems els vèrtexs anteriors i posteriors a la seqüència. Per tant, pot ser representada d'aquesta manera sense perdre informació:

$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_N$$

Els vèrtexs v_o i v_N són els **extrems** del camí. La **longitud** d'un camí és el nombre d'arestes que conté. Una propietat del camí és que dos costats consecutius han de ser per força adjacents o bé idèntics, si estem retrocedint pel mateix costat. Per saber més sobre els camins ens fixarem en el següent graf:

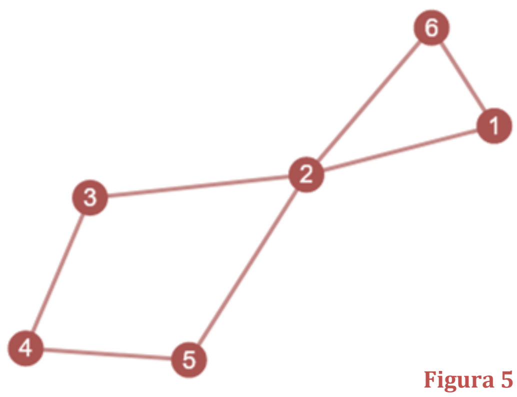


Figura 5

Diem que un camí és **tancat** quan comença i acaba al mateix vèrtex. Per exemple, el camí $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$. Si no té aquesta propietat, el camí és **obert**.

Un **circuit** és un camí tancat en que tots els costats (tot i que no necessàriament tots els vèrtexs) són diferents. Per exemple, el camí $2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 2$.

Un **cicle** és un camí tancat en el qual tots els vèrtexs (excepte l'inicial i el final) són diferents. Per tant, els costats també han de ser diferents. Per exemple, el camí $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1$.

La **longitud** de la via més curta entre un punt i i un punt j en un graf G es coneix com la distància entre els dos vèrtexs i es representa per d(i, j). Aquesta distància és una quantitat positiva dins els nombres enters i té les següents propietats:

$$\mathbf{d(i, j) = 0 \Leftrightarrow i = j}$$

És a dir, la distància entre els vèrtexs *i* i *j* és igual a zero només quan el vèrtex *i* i el vèrtex *j* són el mateix vèrtex.

$$\mathbf{d(i, j) = d(j, i), \forall\, i, j \in V(G)}$$

És a dir, la distància entre els vèrtexs i i j és igual a la distància entre j i i per a tots els valors de i i de j, ja que només és la mateixa aresta llegida a la inversa.

$$d(i, k) \leq d(i, j) + d(j, k), \forall\ i, j, k \in V(G)$$

És a dir, la distància entre i i k sempre és més petita (o igual si els punts formen una línia recta) que la suma de les distàncies entre i i j i entre j i k per a tots els valors de i, j i k.

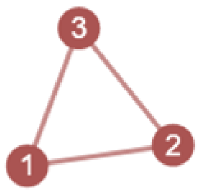


Figura 6

Com podem veure al graf següent, la distància entre 1 i 3 és més petita que la suma de la distància entre 2 i 3 i la distància entre 1 i 2.

$$d(i, j) = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in E(G)$$

És a dir, la distancia entre el vèrtex *i* i el vèrtex *j* és igual a 1 només quan formen una aresta del graf, ja que la distancia més curta que els uneix és aquesta aresta.

1.3. CARACTERITZACIÓ DELS GRAFS

1.3.1. GRAFS SIMPLES I MULTIGRAFS

En realitat, la definició de graf que hem donat fins ara correspon al que anomenem **graf simple**. Hem dit que els elements d'*E* són parells no ordenats d'elements *diferents* a *V*. Per tant, al no permetre que un element aparegui repetit en un mateix parell, no es permet l'existència de **loops**. Els loops són arestes que comencen i acaben al mateix vèrtex.

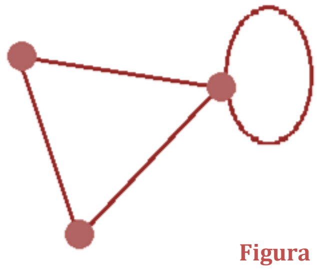


Figura 7

També hem dit que *E* és un conjunt d'elements i no una **família** d'elements. En aquest context, entenem per conjunt una col·lecció d'elements diferents; una família, en canvi, és una col·lecció d'elements que es poden repetir. Així, (1, 2, 3, 4, 5, 6) és un conjunt i una família, mentre que (1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6) és només una família.

Tenint en compte tot això, podem ampliar el concepte de graf introduint el **multigraf***:* el multigraf és un graf amb (possiblement) més d'una aresta entre un mateix parell de vèrtexs. Per tant, en la definició formal de multigraf es permet que *E(G)* sigui una família i no només un conjunt, o sigui que es permet que alguns elements es repeteixin.

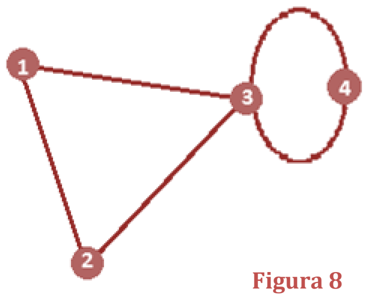


Figura 8

El següent graf és un exemple de multigraf. El conjunt de vèrtexs i la família d'arestes estan formats per:

V(G): {1, 2, 3, 4}

E(G): {(1, 2), (1, 3), (2, 3), **(3, 4)**, **(3, 4)**}

1.3.2. DIGRAFS

Després de veure el concepte de la distància n'introduirem un altre: la **direcció**. Els digrafs o grafs dirigits són grafs en els quals les arestes tenen un sentit definit.

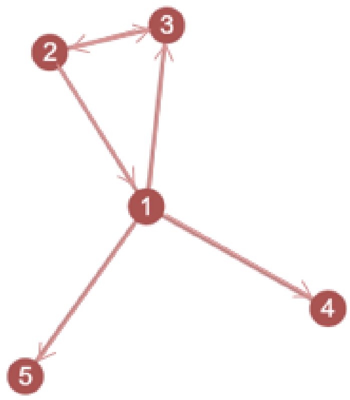


Figura 9

En l'exemple que tenim a la figura 9 veiem que podem anar del node 1 al node 3 de manera directa, però no a la inversa, perquè l'aresta està dirigida del node 1 al node 3. En la majoria dels casos, la direcció de l'aresta indica una relació de precedència entre els nodes. També hi poden haver dues arestes de direccions oposades entre els mateixos nodes; podem anar del node 2 al node 3 i del node 3 al node 2.

1.3.3. GRAFS CONNEXOS I INCONNEXOS

Diem que un graf és **connex** si cada parell dels seus vèrtexs estan connectats.

$$\mathbf{G\ \text{és connex}} \Leftrightarrow \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} : \exists \mu = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

Sent μ un camí entre els nodes v i u.

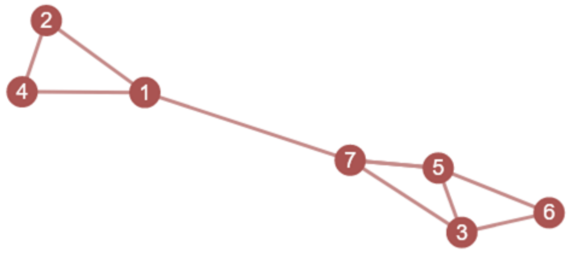


Figura 10

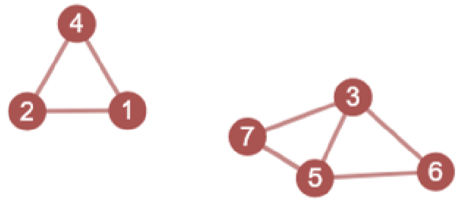


Figura 11

El graf de la figura 10 és un graf connex, ja que podem trobar un camí des de qualsevol dels seus vèrtexs a un altre. El graf de la figura 9, en canvi, és un graf inconnex: no hi ha cap camí entre, per exemple, els vèrtexs 7 i 1.

1.3.4. GRAFS COMPLETS I INCOMPLETS

Un graf és **complet** si existeixen arestes unint totes les possibles parelles de vèrtexs. És a dir, tota parella de vèrtexs *v, u* ha de tenir una aresta (v, u) que els uneixi. El conjunt dels grafs complets és anomenat usualment $\mathbb{K}$, sent $\mathbb{K}_n$ el graf complet de *n* vèrtexs.

Un $\mathbb{K}_n$ té exactament $\frac{n\,(n-1)}{2}$ arestes.

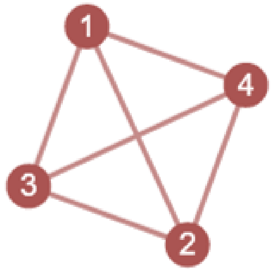


Figura 12

El graf de la figura 12 és un graf complet, ja que totes les possibles parelles de vèrtexs estan unides per una aresta.

El graf té quatre vèrtexs, així que per comprovar la veracitat de la fórmula anterior substituirem *n* per 4.

$\frac{4\,(4-1)}{2}=6$ Com podem veure, el graf té 6 arestes.

1.3.5. GRAFS BIPARTITS

Un graf **bipartit** és un graf els vèrtexs del qual es poden separar en dos conjunts disjunts *A* i *B*. Si el graf és *G = (V, E)*, *V* sent els vèrtexs i *E* les arestes, llavors el graf bipartit ha de complir:

$$A \cup B = V$$

És a dir, el conjunt que conté tots els elements d'*A* i tots els elements de *B* i cap més és el conjunt total de vèrtexs del graf.

$$A \cap B = 0$$

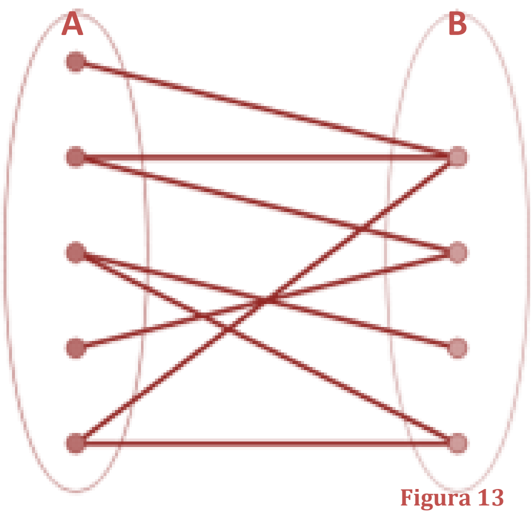


Figura 13

És a dir, el conjunt que conté tots els elements que *A* i *B* tenen en comú no conté cap element, perquè *A* i *B* són conjunts disjunts: no tenen cap vèrtex comú. El graf de la figura 13 és un exemple de graf bipartit.

Un graf bipartit complet és un graf que compleix:

$$\forall\, v_1 \in V_1, \forall\, v_2 \in V_2 \rightarrow e(v_1, v_2) = E$$

És a dir, que és un graf format per dos conjunts disjunts de vèrtexs i per totes les possibles arestes que uneixen aquests vèrtexs. Aquest rebrà una nomenclatura semblant a la que hem vist a l'apartat anterior; en lloc de tenir una sola *n* com a conjunt de tots els vèrtexs, però, tindrem una *m* amb el nombre de vèrtexs del conjunt *A* i una *n* amb el nombre de vèrtexs del conjunt *B*. El graf de la figura 14, per exemple, és un $K_{3,2}$.

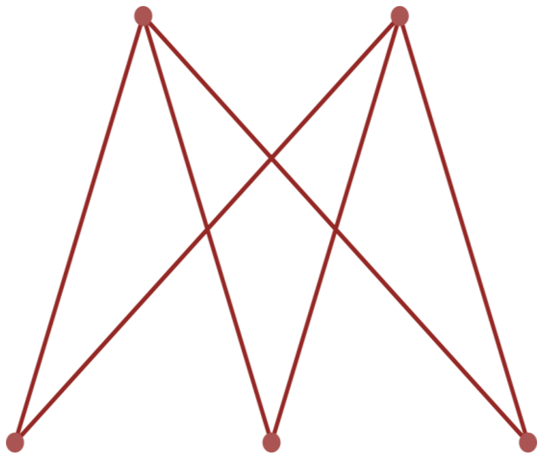


Figura 14

1.3.6. GRAFS PLANS

Un graf pla és un graf que es pot dibuixar en un pla sense que cap aresta es creui. El matemàtic polonès Kazimierz Kuratowski va trobar una caracterització dels grafs plans coneguda com a **teorema de Kuratowski**, però per tal d'entendre'l haurem d'aclarir primer un concepte nou: l'**isomorfisme de grafs.**

Dos grafs *G* i *H* són isomorfs si es compleix que qualsevol parella de vèrtexs *u* i *v* de *G* són adjacents només si ho són les seves imatges en *H*.

Abans de començar amb el teorema de Kuratowski cal explicar què és una subdivisió elemental. Una subdivisió elemental, o subdivisió d'arestes, és una operació que afegeix un vèrtex a una aresta partint aquesta en dos.

Figura 15

El teorema de Kuratowski diu que un graf no pot ser pla si conté un subgraf que és isomorf amb o és una subdivisió elemental de K_5, el graf complet de 5 vèrtexs, o de $K_{3,3}$, el graf bipartit complet de 6 vèrtexs.

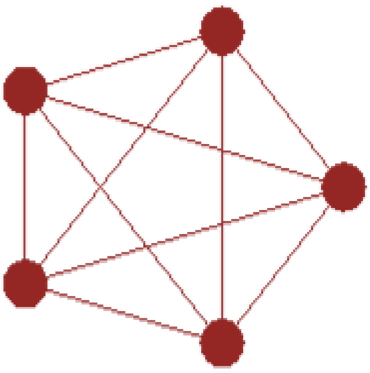


Figura 16: K_5

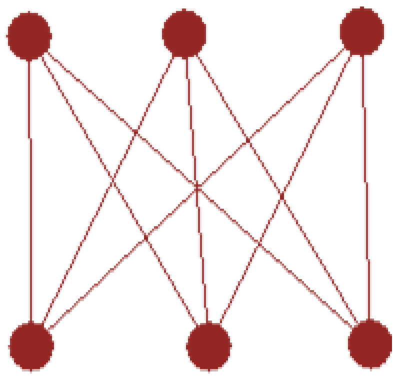


Figura 17: $K_{3,3}$

Per exemple, és el següent graf pla?

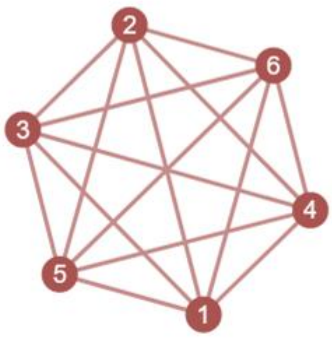


Figura 18

Si traiem un vèrtex d'aquest graf K_6 i totes les arestes que el connecten amb altres vèrtexs ens adonem que el graf K_6 conté un subgraf K_5. Per tant, el graf K_6 no és pla.

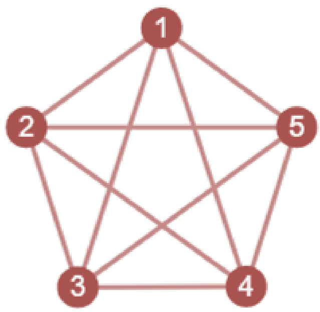


Figura 19

1.3.7. HOMEOMORFISME DE GRAFS

Després de definir les subdivisions elementals podem tractar el tema de **l'homeomorfisme de grafs**. Dos grafs *G* i *H* són homeomorfs si es poden obtenir a partir d'un mateix graf mitjançant **subdivisions elementals**.

Per exemple, tots els grafs cicle són homeomorfs: si fem una subdivisió elemental a un graf C_4, n'obtindrem un graf C_5.

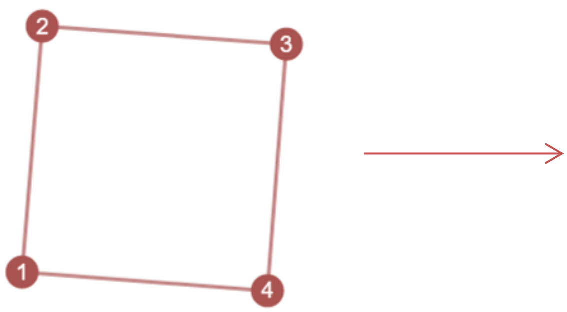


Figura 20

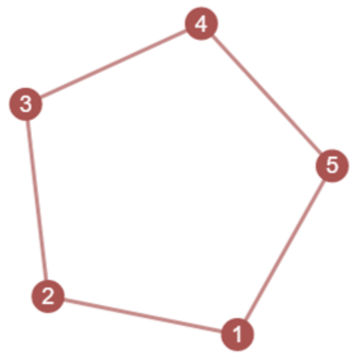


Figura 21

Ara que tenim clar el concepte d'homeomorfisme de grafs podem donar una formulació del teorema de Kuratowski equivalent a la que hem donat a l'anterior apartat: un graf és pla només quan no conté cap **subgraf homeomorf a K_5 o $K_{3,3}$**. Per exemple, el graf de la figura 22.

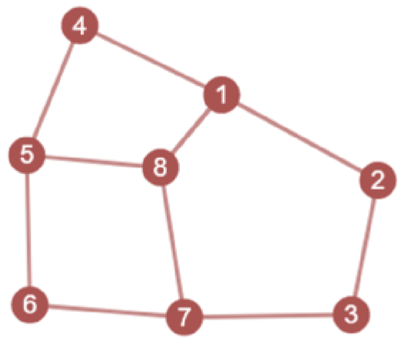


Figura 22

1.3.8. ARBRES

Un arbre és un graf simple G que compleix els següents requisits:

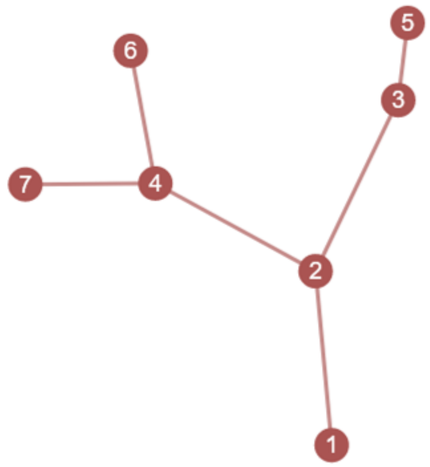


Figura 23

- El graf G és **connex** i **no té cicles**. Si els vèrtexs 6 i 7 de la figura 23 estiguessin connectats per una aresta, per exemple, el graf no seria un arbre, perquè les arestes 6-7, 7-4, i 4-6 formarien un cicle.
- Si afegim una aresta més a l'arbre G es forma, per força, un cicle.
- Si traiem qualsevol aresta, el graf deixa de ser connex.
- Qualsevol vèrtex en un arbre està connectat a qualsevol altre mitjançant un **camí simple**, és a dir, un camí en el qual no és necessari repetir vèrtexs.

El vèrtex 1 d'aquest arbre s'anomena l'**arrel** de l'arbre; el vèrtex dos és un **fill** de l'arrel, així com els vèrtexs 3 i 4 són fills del vèrtex 2. L'alçada (**h**) de l'arbre és de 4 nivells: el primer nivell està format pel vèrtex 1, el segon pel vèrtex 2, el tercer pels vèrtexs 3 i 4 i el quart pels vèrtexs 5, 6 i 7.

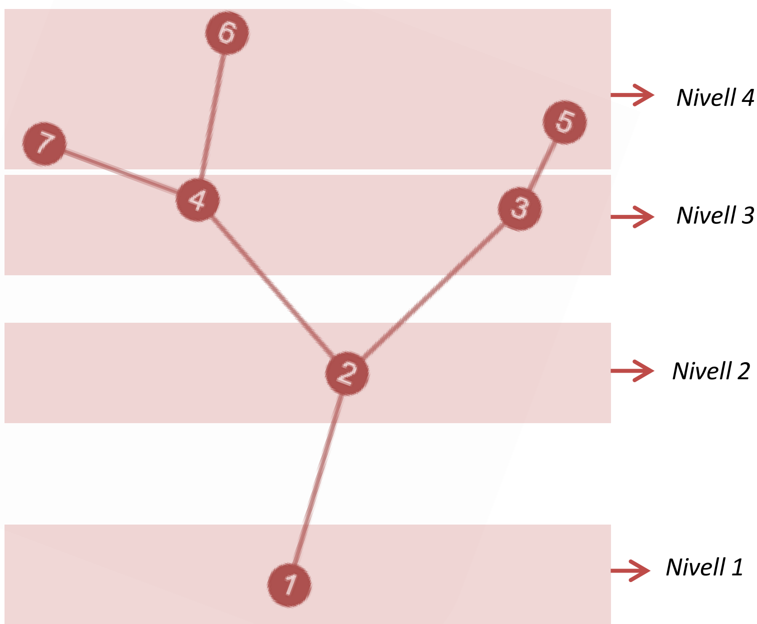


Figura 24

Un **arbre k-nari** és un arbre on els vèrtexs poden tenir un màxim de k *fills*. Els fills són les arestes que surten del vèrtex: per exemple, a la figura 26 el vèrtex 4 té dos fills. L'exemple més important d'arbre k-nari és, probablement, l'arbre 2-nari o arbre binari, els vèrtexs del qual poden tenir només dos fills.

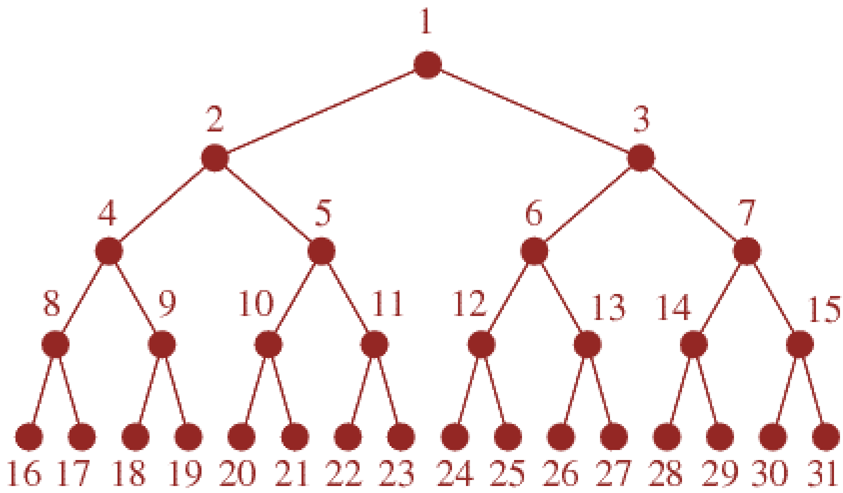


Figura 26

1.4. GRAFS I MATRIUS

Els grafs també poden ser representats amb matrius de diferents maneres. L'avantatge que tenim quan representem grafs mitjançant matrius és que disposem de tot un sistema per a operar i manipular matrius amb l'objectiu de treure'n informació característica sobre els grafs. A continuació explicarem els dos tipus de representació més importants.

1.4.1. MATRIU D'ADJACÈNCIA

La matriu d'adjacència d'un graf és una **matriu quadrada** de *n* fileres i *n* columnes, sent *n* el nombre de vèrtexs del graf.

- ### Construcció de la matriu d'adjacència d'un graf:

Com que el graf que utilitzarem com a exemple té 6 vèrtexs, la seva matriu d'adjacència tindrà 6 fileres i 6 columnes.

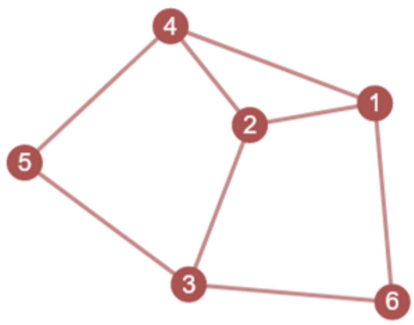


Figura 27

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Si dos vèrtexs estan directament units per una aresta escrivim un 1, i si no ho estan escrivim un 0. Si els vèrtexs 1 i 2 estan units, hem d'escriure 1 on es creuen la columna 1 i la filera 2 i on es creuen la columna 2 i la filera 1. La matriu hauria de quedar **simètrica** agafant com a eix de simetria la diagonal de zeros que la creua.

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Si el graf és dirigit, la matriu no ha de ser simètrica. Si hi ha una aresta que només va del vèrtex 1 al 3, posaríem un 1 on es creuen la filera 1 i la columna 3, però no on es creuen la filera 3 i la columna 1.

- **Matrius i camins:**

Una de les utilitats que tenen les matrius d'adjacència és com ens permeten saber la **quantitat de camins d'una certa longitud** que hi ha en un graf. Agafem, per exemple, el graf de la figura 27. Volem saber, per exemple, quants camins de longitud 2 (dues arestes) uneixen els vèrtexs 2 i 5. Per calcular això mitjançant matrius només hem de multiplicar la matriu d'adjacència d'aquest graf que hem fet prèviament i multiplicar-la per sí mateixa tantes vegades com arestes tinguin els camins que busquem. En aquest cas, elevarem la matriu al quadrat. La fórmula per multiplicar matrius és:

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{m1}b_{np} \end{pmatrix}$$

Per multiplicar matrius hem de multiplicar cada nombre de la primera filera de la primera matriu per cada nombre de la primera columna de la segona matriu.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Això ens donarà el primer nombre de la matriu resultant, que en aquest cas serà

$$0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 3.$$

Després, per calcular el segon nombre, multiplicarem la primera filera de la primera matriu per la segona columna de la segona matriu, i així successivament.

Al final, ens quedarà això:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} & \begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\end{array}$$

Ara només hem de mirar la matriu per saber quants camins de longitud 2 hi ha entre els vèrtexs 2 i 5. Com podem veure, hi ha 2 camins (2 – 4 – 5 i 2 – 3 – 5).

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} & \begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\end{array}$$

1.4.2. MATRIU D'INCIDÈNCIA

La matriu d'incidència és una **matriu binària** (és a dir, que només té zeros i uns) on les columnes corresponen a les arestes i les files als nodes.

- **Construcció de la matriu d'incidència d'un graf:**

Agafarem com a exemple el graf que hem fet servir amb la matriu d'adjacència per poder apreciar-ne les diferències.

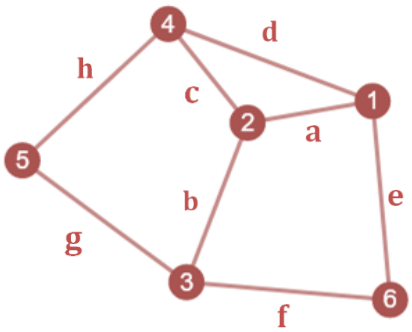


Figura 28

Per construir la matriu d'incidència d'aquest graf hem posat una lletra a cada aresta; també assignarem una lletra a cada columna de la matriu.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Mirarem primer l'aresta a. Com podem veure, uneix els vèrtexs 1 i 2. Per tant, escriurem 1 a a1 i a a2. A la resta d'espais escriurem 0. Hem de fer això amb totes les columnes i al final obtindrem aquesta matriu:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Com podem veure, i a diferència de la matriu d'adjacència, la matriu d'incidència **no ha de ser quadrada ni simètrica**.

ii. APLICACIONS DE LA TEORIA DE GRAFS

El desenvolupament de la branca de les matemàtiques que estudia la teoria de grafs sempre ha estat motivat per les seves aplicacions. A continuació veurem uns exemples de les moltes formes pràctiques d'aplicar la teoria de grafs.

2.1. GEOGRAFIA I CÈNCIES URBANES

2.1.1. CAMINS ÒPTIMS

- **L'algoritme de Djisktra:**

L'**algoritme de Djisktra** s'utilitza per calcular el **camí més curt** d'un determinat vèrtex fins a qualsevol dels altres vèrtexs del graf.

Per explicar aquest mètode utilitzarem com a exemple el graf ponderat de la figura 29. Damunt aquest graf construirem els camins més curts des del vèrtex 3 a la resta de vèrtexs. Ens quedarem amb algunes arestes i n'eliminarem d'altres fins a quedar-nos amb un arbre.

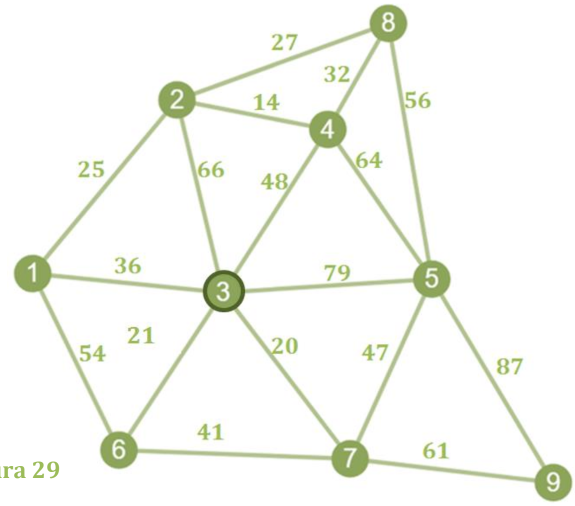


Figura 29

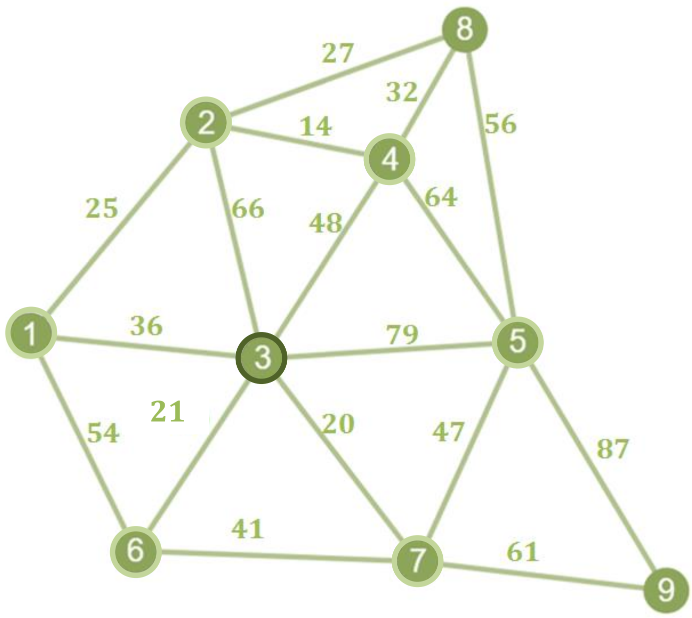
GRAFS PONDERATS

El graf de la figura és un graf ponderat perquè les seves arestes tenen un pes que correspon a la distància entre els vèrtexs que relacionen.

Per saber quines arestes hem d'eliminar hem de fer una taula com aquesta:

	Distància a 3	Posició anterior
1		
2		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Ara mirarem a quins vèrtexs podem arribar directament, amb només una aresta, des de 3.



Podem arribar als vèrtexs 1, 2, 4, 5, 6 i 7. Hem d'escriure a la taula a quina distància són de 3, i posar a posició inicial 3, que és d'on sortim.

	Distància a 3	Posició anterior
1	36	3
2	66	3
4	48	3
5	79	3
6	21	3
7	20	3
8		
9		

Com que la distància de 7 a 3 és la més curta, agafarem l'aresta 3-7 com a principi del nostre camí.

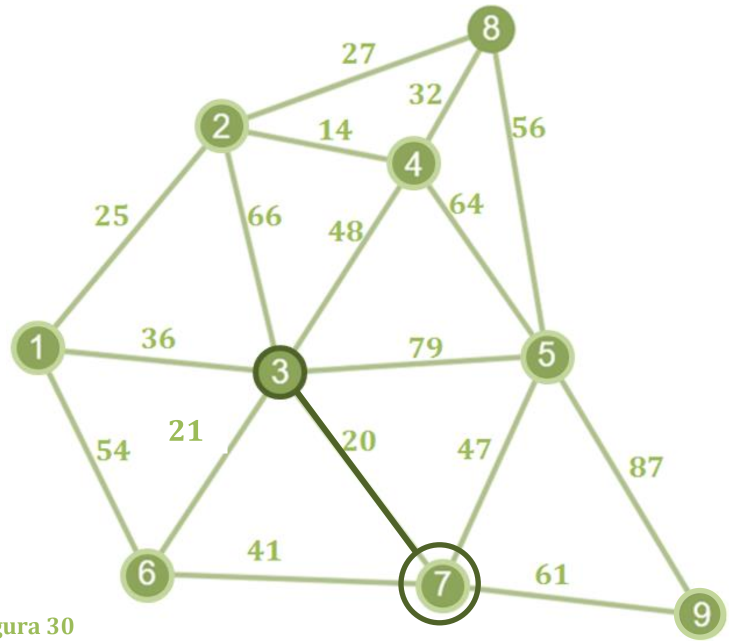


Figura 30

Ara, des de 7, podem accedir a 9, per tant el marquem també. Actualitzarem la taula amb la nova informació: des de 7 arribem a 6, a 5 i a 9. Calcularem la distància dels 3 recorreguts que passen per 7 i ens quedarem amb aquesta distància nova només si és més petita que la que ja teníem. El camí de 3 a 6 passant per 7, per exemple, és de 61, després de sumar les dues arestes (20+41). Com que la distància que teníem abans, 21, és més petita, ens quedarem amb la que ja teníem. La distància entre 3 i 5 passant per 7 ens queda de 67; ens quedarem amb aquesta. La distància de 3 a 9 passant per 7 és de 81, i com no tenim cap d'anterior posarem aquesta.

	Distància a 3	Posició anterior
1	36	3
2	66	3
4	48	3
5	67	7
6	21	3
7	20	3
8		
9	81	7

Ara buscarem la següent distància més curta: 6.

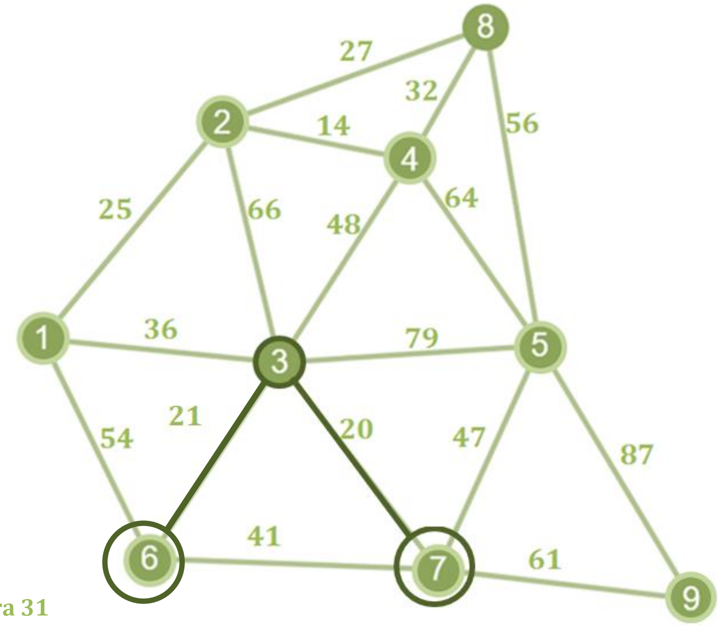


Figura 31

Tornem a actualitzar la taula de la mateixa manera:

	Distància a 3	Posició anterior
1	36	3
2	66	3
4	48	3
5	67	7
6	21	3
7	20	3
8		
9	81	7

La taula queda igual perquè des de 6 només podem arribar a 1, i la distància nova, 75, és major que l'anterior (36). Agafem una altra vegada la distància més petita; ara, 1.

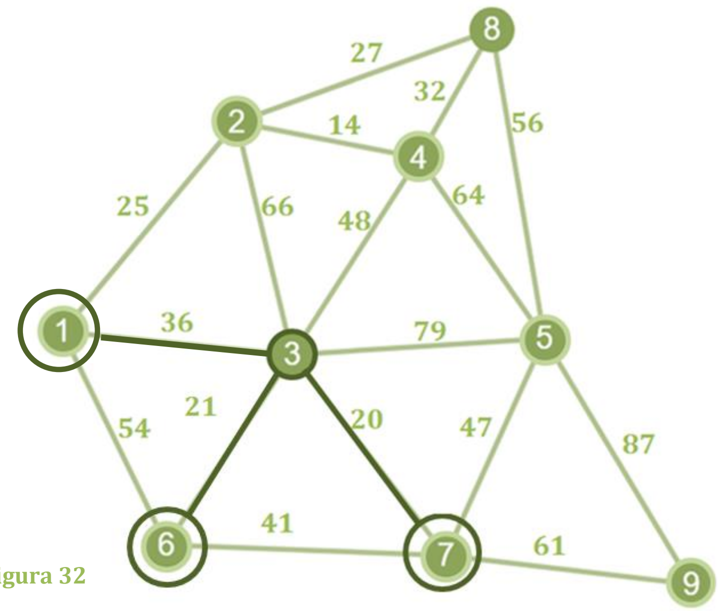
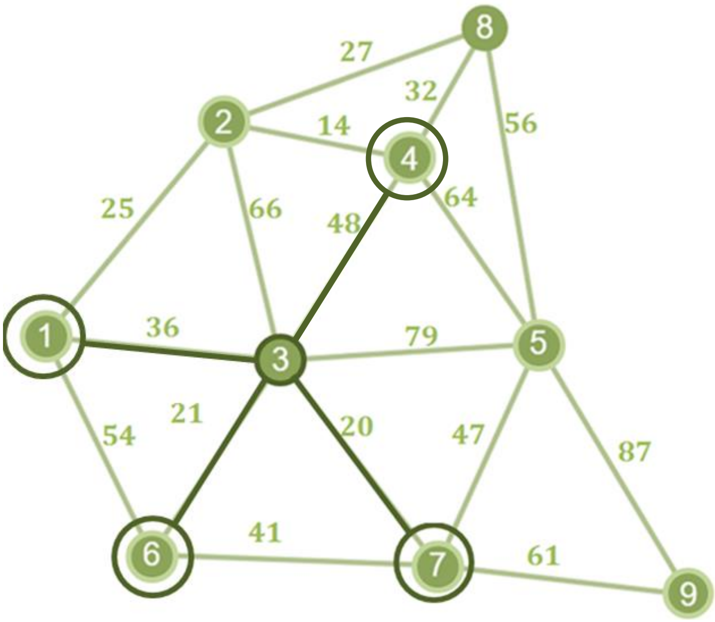


Figura 32

Actualitzem la taula; la distància de 3 a 2 passant per 1 és més petita que la distància directa de 3 a 2:

	Distància a 3	Posició anterior
1	36	3
2	61	1
4	48	3
5	67	7
6	21	3
7	20	3
8		
9	81	7

Ara agafarem 4, la següent distància més curta:



Actualitzem la taula:

	Distància a 3	Posició anterior
1	36	3
2	61	1
4	48	3
5	67	7
6	21	3
7	20	3
8	80	4
9	81	7

Agafem el següent vèrtex: el 2.

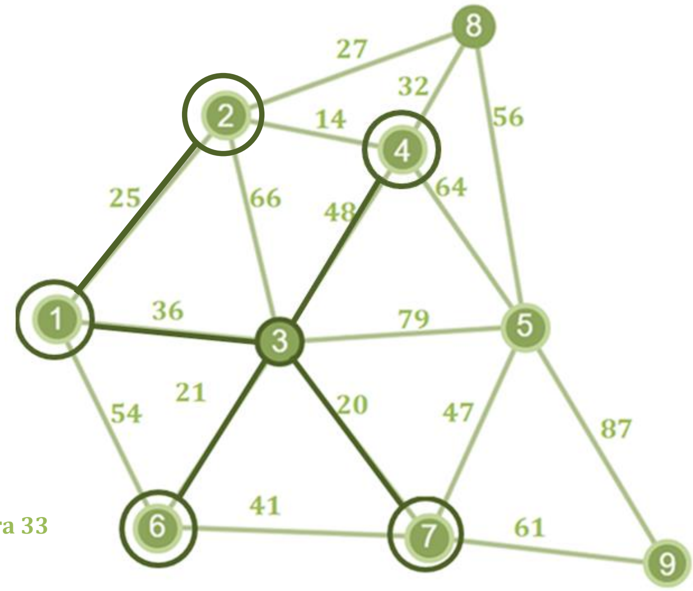


Figura 33

La taula quedarà igual:

	Distància a 3	Posició anterior
1	36	3
2	61	1
4	48	3
5	67	7
6	21	3
7	20	3
8	80	4
9	81	7

El resultat final serà aquest:

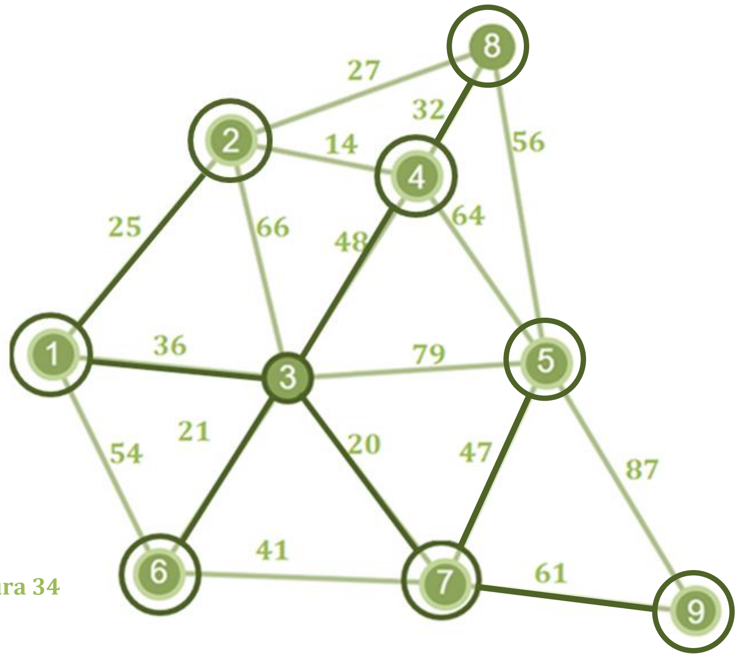


Figura 34

Com a exemple calcularem el camí més curt per anar de casa meva a l'Atrium.

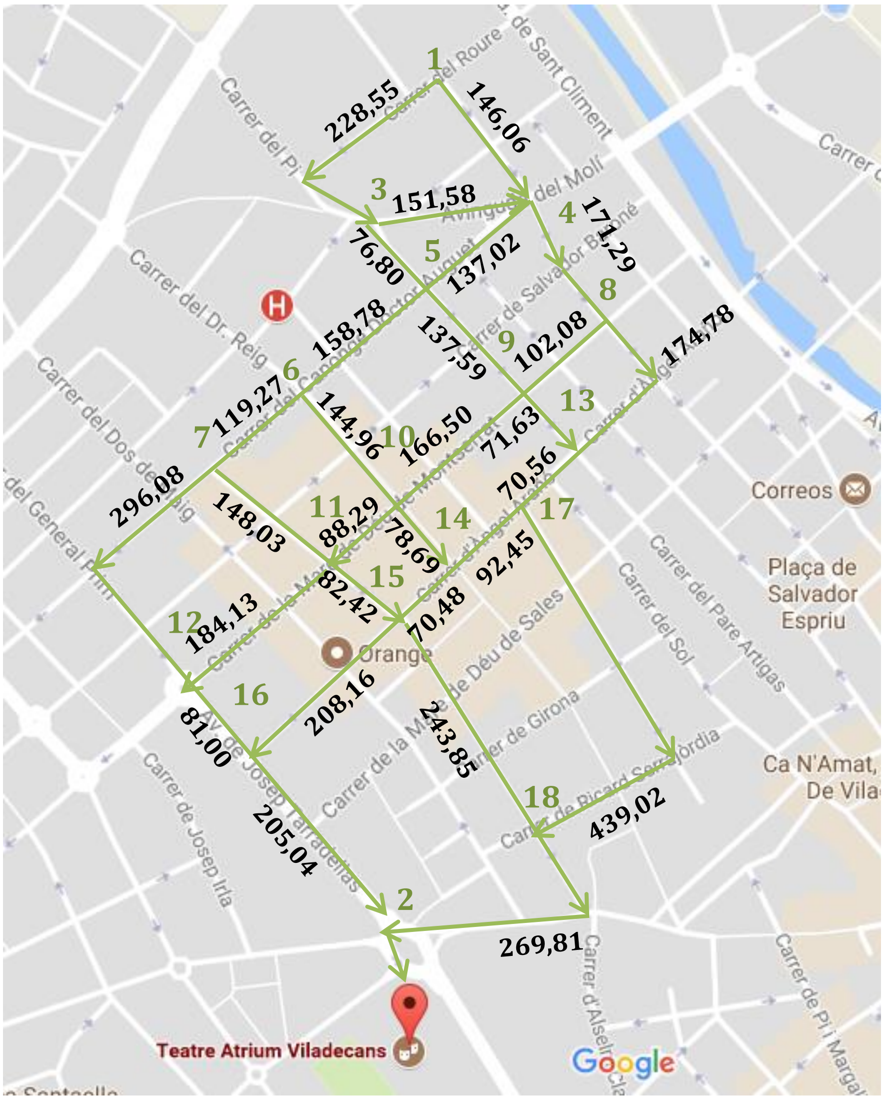


Figura 35: distància en m

El primer pas serà passar les possibles rutes des de casa meva a l'Atrium que podem veure en aquest mapa a forma de graf per tal d'aplicar després l'algoritme: cada intersecció entre dos carreteres serà un vèrtex i cada carretera serà una aresta.

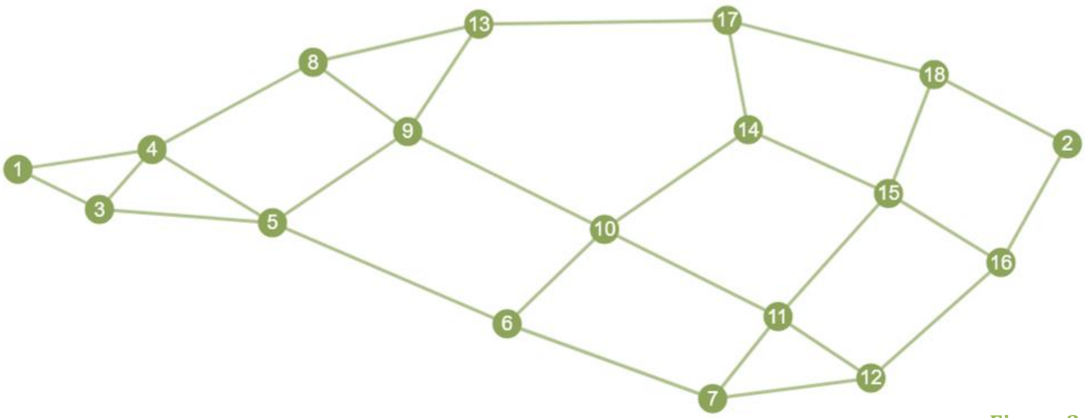


Figura 36

Després d'aplicar l'algoritme de Djikstra, l'arbre ens quedarà així:

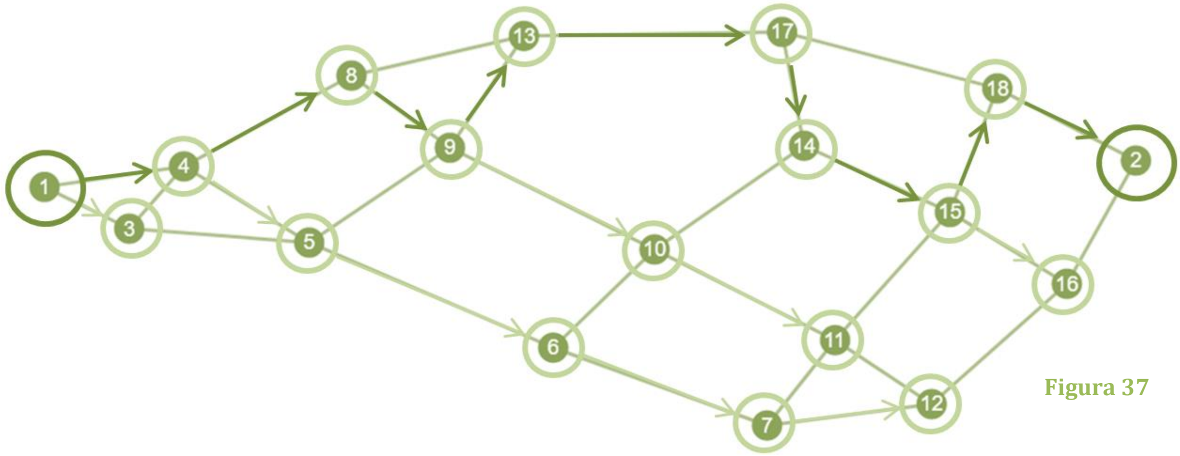


Figura 37

Traslladat al mapa, el camí serà aquest:

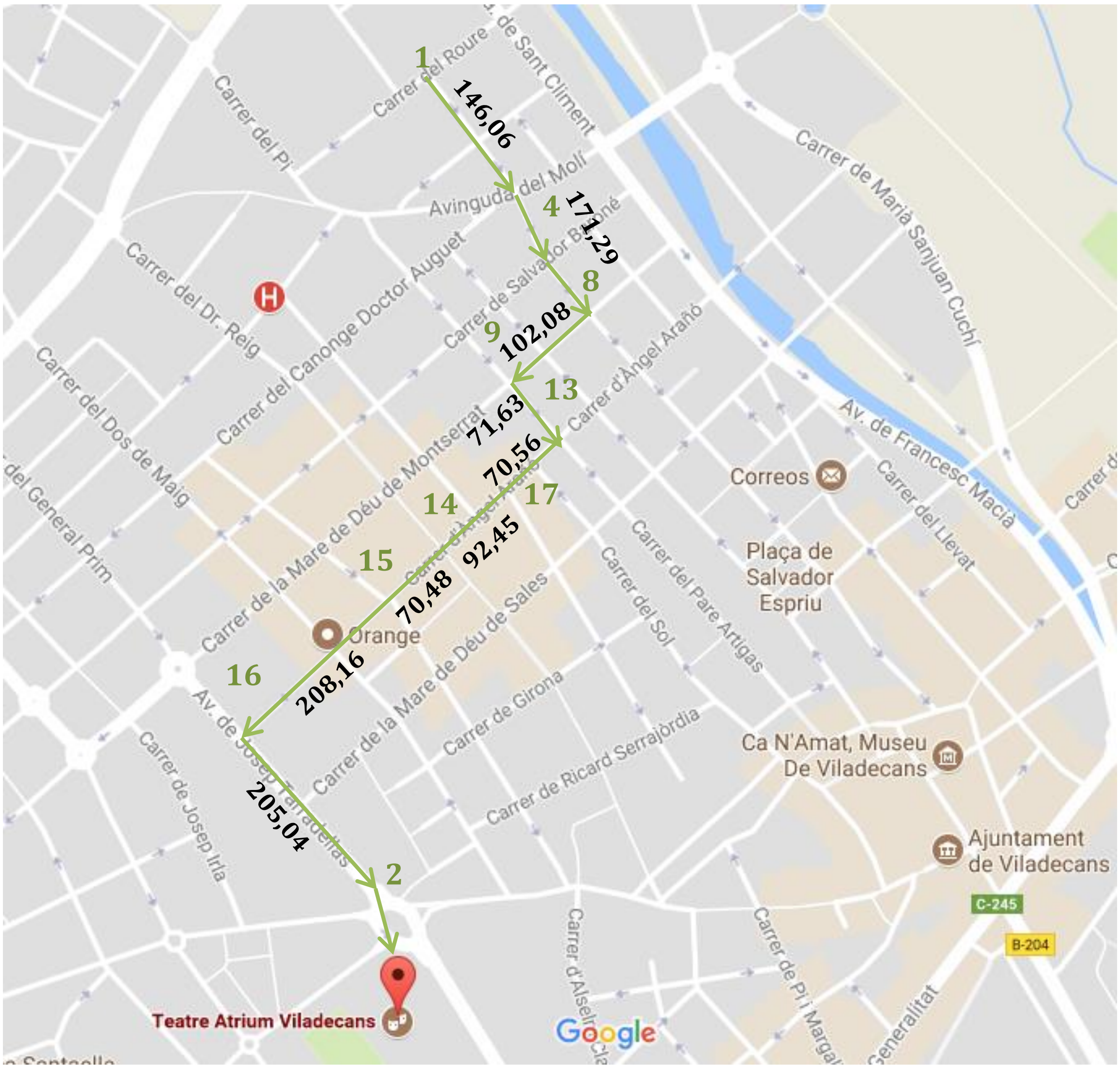


Figura 38

- ### L'algoritme de Floyd:

L'**algoritme de Floyd** és més general que l'algoritme de Dijkstra perquè determina la ruta més curta entre dos vèrtexs qualsevols del graf. Per explicar aquest mètode utilitzarem el graf de la figura 39:

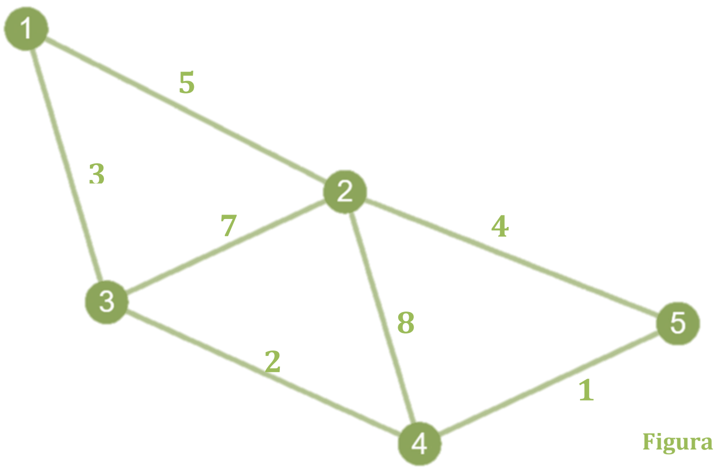


Figura 39

Hem de fer dues taules. A la primera, apuntarem la distància directa entre els vèrtexs. Si no hi ha una aresta que connecti de manera directa dos vèrtexs, marcarem la distància com a infinita.

	1	2	3	4	5
1	0	5	3	∞	∞
2	5	0	7	8	4
3	3	7	0	2	∞
4	∞	8	2	0	1
5	∞	4	∞	1	0

L'altra taula serà així:

	1	2	3	4	5
1	0	2	3	4	5
2	1	0	3	4	5
3	1	2	0	4	5
4	1	2	3	0	5
5	1	2	3	4	0

Primer treballarem amb la primera taula. Agafarem la primera fila i la primera columna i sumarem els seus nombres en diagonal. Si el resultat és més petit que el nombre corresponent (si estem operant el 1r de la filera amb el 1r de la columna, serà el 1r nombre de la primera fila i de la primera columna disponible), el canviem. Per exemple; 5 + 5 = 10. Com que 10 no és més petit que 0, no canviem el 0.

	1	2	3	4	5
1	0	5	3	∞	∞
2	5	0	7	8	4
3	3	7	0	2	∞
4	∞	8	2	0	1
5	∞	4	∞	1	0

Ara fem el següent nombre de la filera. Com que 5 + 3 = 8 i 8 > 7, no canviem el 7.

	1	2	3	4	5
1	0	5	3	∞	∞
2	5	0	7	8	4
3	3	7	0	2	∞
4	∞	8	2	0	1
5	∞	4	∞	1	0

Farem això fins al final de la primera filera i després farem el mateix però amb el 3, que és a sota del 5 amb el qual estàvem operant, i així amb tots els nombres de la columna. En aquest cas no hem hagut de canviar res, així que passem a la filera i la columna 2.

	1	2	3	4	5
1	0	5	3	∞	∞
2	5	0	7	8	4
3	3	7	0	2	∞
4	∞	8	2	0	1
5	∞	4	∞	1	0

En aquest cas sí hem hagut de modificar la taula:

	1	2	3	4	5
1	0	5	3	**13**	**9**
2	5	0	7	8	4
3	3	7	0	2	**11**
4	**13**	8	2	0	1
5	**9**	4	**11**	1	0

Ara també haurem de canviar la segona taula. En els mateixos llocs que hem modificat a la primera taula hem d'escriure el nombre de la filera/columna amb la qual estàvem treballant; en aquest cas, 2.

	1	2	3	4	5
1	0	2	3	**2**	**2**
2	1	0	3	4	5
3	1	2	0	4	**2**
4	**2**	2	3	0	5
5	**2**	2	**2**	4	0

Ara tornem a la primera taula i fem el mateix amb la resta de fileres i columnes. El resultat final serà aquest:

	1	2	3	4	5
1	0	5	3	5	6
2	5	0	7	5	4
3	3	7	0	2	3
4	5	5	2	0	1
5	6	4	3	1	0

	1	2	3	4	5
1	0	2	3	3	4
2	1	0	3	5	5
3	1	2	0	4	4
4	3	5	3	0	5
5	4	2	4	4	0

La primera taula ens diu la longitud del camí més curt entre dos vèrtexs qualsevols, mentre que la segona taula ens assenyala per quin vèrtex passa aquest camí. Per exemple, podem veure que el camí més curt entre 5 i 3 és de 3 i passa pel vèrtex 4:

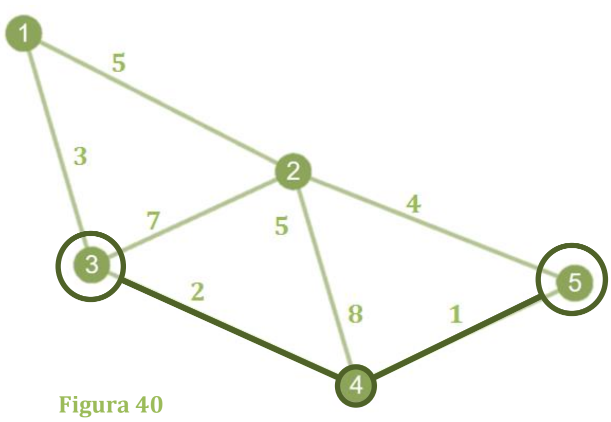


Figura 40

2.1.2. XARXES DE METRO

L’aplicació de la teoria de grafs als mapes de les xarxes de metro es va donar per primer cop a Londres, l’any 1931. Els primers mapes del metro de Londres eren **mapes geogràfics**, és a dir, sobre un mapa real de la ciutat es dibuixaven les diferents línies de metro amb el seu recorregut real aproximat i amb les estacions situades seguint el mateix mapa.

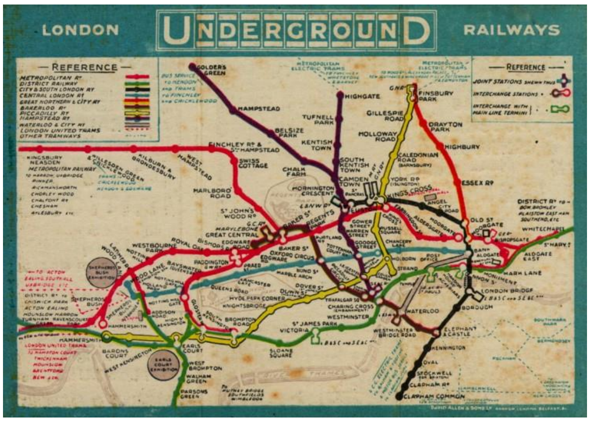


Figura 41: Plànol del metro de Londres *(1928)*


Figura 42: Plànol del metro de Londres *(1931)*


Figura 43: Plànol actual del metro de Londres

Però, si ho pensem, i així ho va intuir l’enginyer anglès Harry Beck, el viatger de metro no necessita saber quin recorregut fa el metro per arribar d'una estació o a una altra, sinó simplement conèixer la **posició relativa** de les estacions i els **encreuaments** d'aquestes en les diferents estacions per poder fer transbords. És a dir, l'usuari necessita un **plànol topològic** del metro. Així, prescindint del recorregut real de les línies, el mapa és més clar i fàcil d’utilitzar pel viatger: no cal que mostri les corbes en el recorregut d'una part a una altra de la ciutat.

Des del punt de vista matemàtic, diem que un plànol de metro és un **graf en què les estacions són vèrtexs i les línies són arestes**. Beck va basar el seu primer disseny en els circuits elèctrics que tan acostumat estava a veure. Amb els anys va anar modificant el mapa; per exemple, al plànol de 1936 va eliminar les corbes i només va dibuixar angles de 45° i 90°.

Des d'aleshores el mapa ha evolucionat molt fins a convertir-se en l'actual.

2.2. PSICOLOGIA I SOCIOLOGIA

La teoria de grafs serveix per, dins la branca de la psicologia, representar **xarxes socials** de manera gràfica, sent els vèrtexs els agents socials i les arestes les relacions entre ells. Podem establir jerarquies o relacions de dominància o influència mitjançant grafs dirigits. Per entendre-ho millor posarem un exemple simplificat:

Imaginem que una psicopedagoga de l'institut identifica un grup d'alumnes problemàtics. Mitjançant l'observació i algunes entrevistes personals, és capaç d'establir qui té influència sobre qui (o qui "domina" a qui). Elabora, llavors, aquest graf:

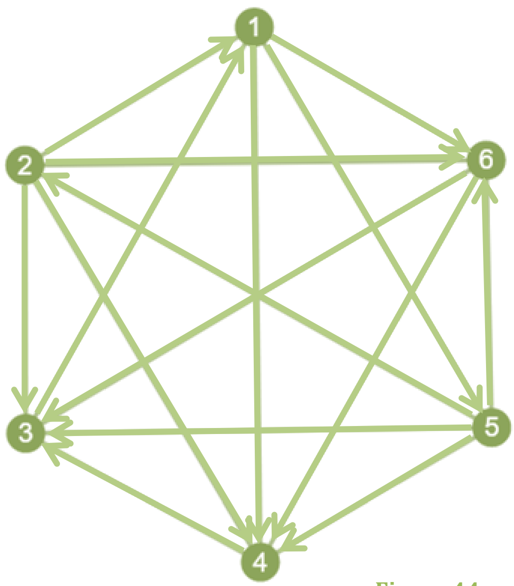


Figura 44

La fletxa representa una relació en què una persona té influència sobre una altra; per exemple, que l'aresta 2-1 estigui dirigida de 2 a 1 significa que 2 té influència sobre 1. L'objectiu de la psicopedagoga és identificar qui és el líder del grup, és a dir, qui té més influència sobre els altres. Amb aquesta informació l'orientació serà més eficaç. Per saber qui és el líder hem de fer la matriu d'adjacència del graf:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si sumem les fileres, sabrem quantes persones domina cadascú:

- 1 domina 3 persones
- 2 domina 4 persones
- 3 domina 1 persona
- 4 domina 1 persona
- 5 domina 4 persones
- 6 domina 2 persones

Com podem veure, tant 2 com 5 dominen 4 persones, i per tant no podem saber quin dels dos és realment el líder. Per saber-ho, recorrerem al mètode que hem fet servir al punt de matrius i camins per saber, a partir de matrius d'adjacència, els camins de 2 arestes: hem de multiplicar la matriu per si mateixa. El resultat serà:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumant les files, ara sabem que:

- 1 té 7 relacions d'influència en segon grau
- 2 té 7 relacions d'influència en segon grau
- 3 té 3 relacions d'influència en segon grau
- 4 té 1 relació d'influència en segon grau
- 5 té 8 relacions d'influència en segon grau
- 6 té 2 relacions d'influència en segon grau

Té sentit pensar que si una persona 1 té influència sobre una persona 2 que, a la vegada, té influència sobre una persona 3, la persona 1 tindrà certa influència sobre la persona 3. Per aquest motiu utilitzarem aquestes influències de segon grau per desempatar 2 i 5:

- 2 domina 4 persones en primer grau i té 7 relacions d'influència en segon grau: 4 + 7 = 11
- 5 domina 4 persones en primer grau i té 8 relacions d'influència en segon grau: 4 + 8 = 12

Així sabem que el líder del grup és 5.

2.3. TECNOLOGIA

2.3.1. XARXES SOCIALS

Un bon exemple d'una aplicació dels grafs a les xarxes socials és un nou algoritme a la xarxa social Tumblr. Explicaré com funciona a través d'una de les seves moltes utilitats:

La comunitat de Tumblr té, per desgràcia, un greu problema: hi ha un subgrup de persones d'ideologies neonazis que es dediquen a rebloguejar posts d'altres blogs afegint-hi la seva pròpia propaganda racista, sexista o homofòbica. Però, què té això a veure amb els grafs?

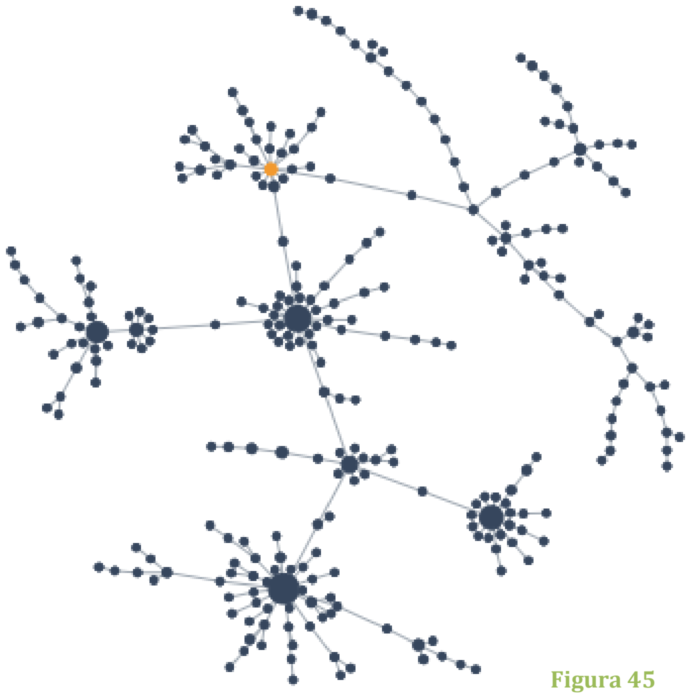


Figura 45

Tumblr ha afegit un nou algoritme que et permet veure els reblogs d'un dels teus posts en forma de graf; el punt taronja és el teu post original, mentre que els punts blaus són els reblogs que altres blogs han fet del teu post. Les arestes ens indiquen de qui l'han rebloguejat.

El principal problema que tenim és: no podem bloquejar tots els blogs neonazis. Simplement en són massa, i tractar de bloquejar-los tots un a un és una manera poc eficient de tenir un dash net. Però si analitzem el graf podem contraatacar d'una altra manera.

Quan cliques sobre un punt, pots veure el contingut que aquest blog ha afegit al teu post; d'aquesta manera, pots veure si és un blog positiu i constructiu o si és tòxic. Si l'aportació ha estat positiva, el més probable és que les persones que rebloguegin el teu post del seu blog també tinguin blogs semblants.

Veiem que d'aquest post han sortit dos grans blocs de reblogs a través de dos posts. Cliquem primer en un d'ells, el que surt de color verd a la fotografia. Veiem que no només és la seva aportació constructiva i la seva ideologia semblant a la del meu post, sinó que les persones que han rebloguejat el post a través d'aquest blog també comparteixen aquestes característiques.

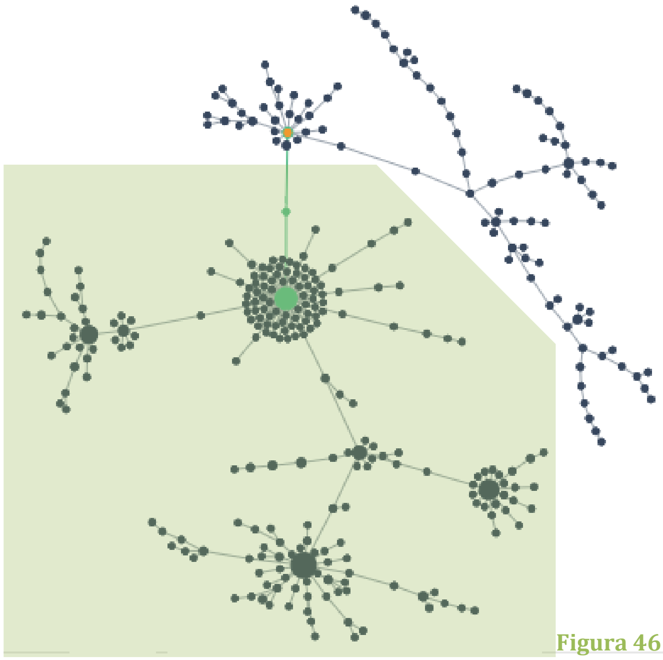


Figura 46

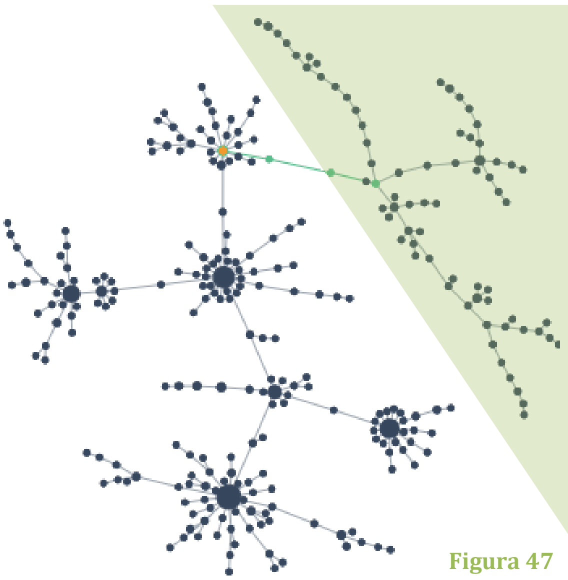


Figura 47

En canvi, si fem clic sobre el punt verd de la figura 47, podrem veure que el contingut de les aportacions d'aquest blog són de caire marcadament racista. Evidentment, les persones que han rebloguejat el post a través d'aquest blog són també defensors d'idees neonazis.

Per tant, aquest algoritme ens permet identificar de manera extremadament senzilla qui és el catalitzador de tot un seguit de comentaris tòxics. Si bloquegem aquesta persona, eliminem la porta que tenien tots els altres al nostre blog. És una manera molt més ràpida i eficaç, tot i que no completament infal·lible, que bloquejar tots els blogs de forma individual.

2.3.2. QUANTES CÀMERES SÓN NECESSÀRIES PER VIGILAR CASA MEVA?

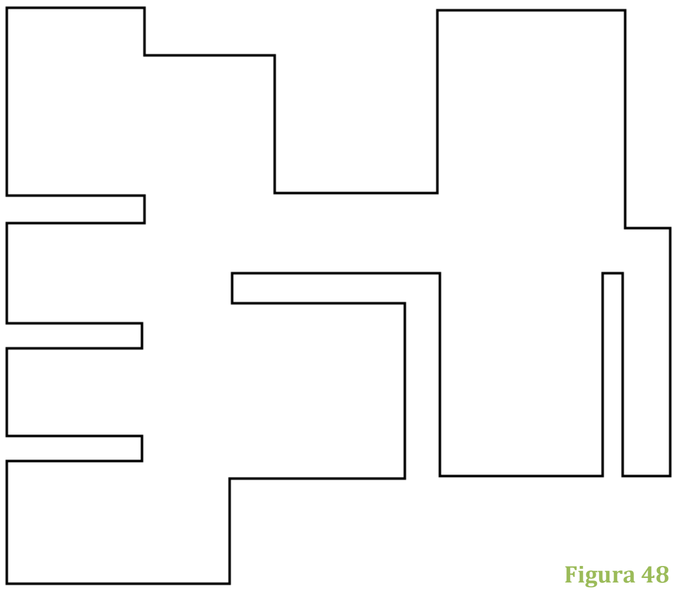


Figura 48

Aquest és un plànol del meu pis. Com podem veure, forma un polígon simple tancat. Imaginem que vull tenir tota la casa vigilada per càmeres de seguretat que tenen un rang de 360°. De què em serveixen els grafs per saber el número mínim de càmeres que necessito i on posar-les?

El problema amagat darrere aquest exemple hipotètic és, en realitat, com trobar el mínim de punts possibles (càmeres) des dels quals puc dibuixar una línia recta a qualsevol altre punt del polígon sense que la línia surti d'aquest.

El primer pas serà triangular aquest polígon, és a dir, dividir-lo només en triangles:

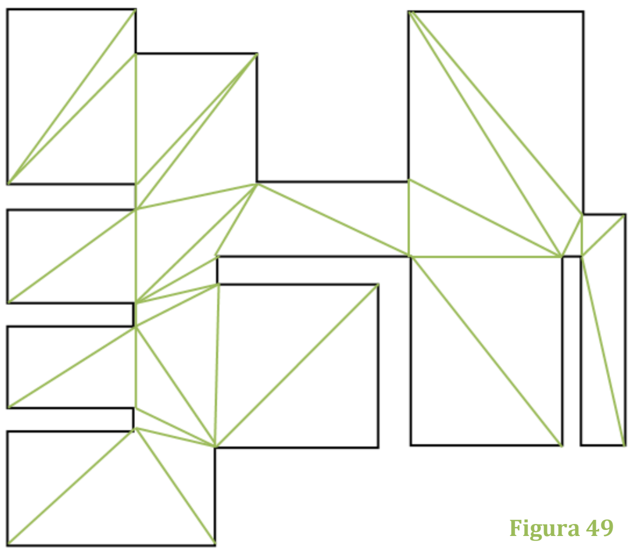


Figura 49

El següent pas serà dibuixar un punt dins cada triangle i relacionar els adjacents de manera que formem un graf arbre:

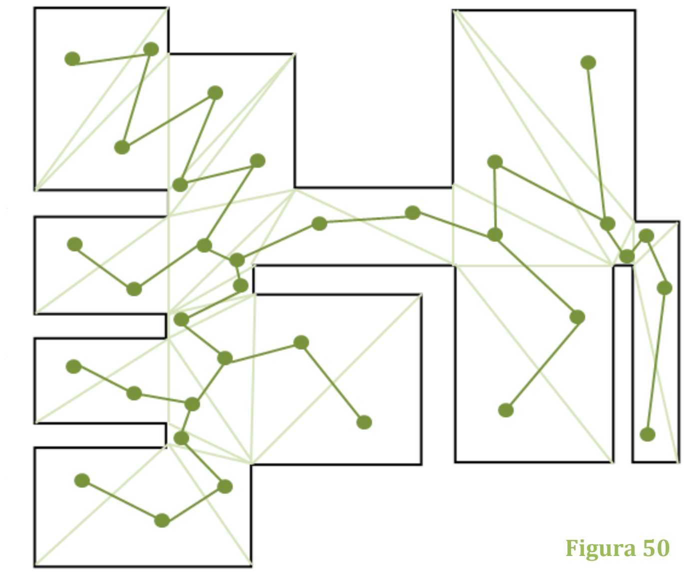


Figura 50

Aquest graf que acabem de crear ens servirà de camí per al pròxim pas. Hem de pintar tots els vèrtexs utilitzant tres colors de manera que dos vèrtexs adjacents no comparteixin mai el mateix color. Per fer aquesta tasca més fàcil només haurem d'agafar un extrem del graf i anar-lo seguint, de manera que cada triangle tingui els tres colors. El resultat final serà aquest:

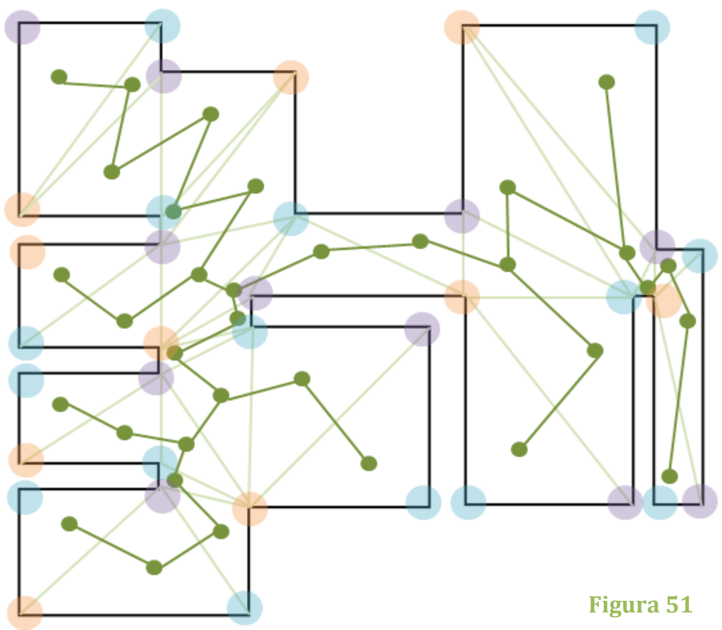


Figura 51

Ens han sortit 11 punts morats, 10 punts taronges, i 15 punts blaus. Agafarem els punts taronges, dels que hi ha menys, i és allà on col·locarem les càmeres. He canviat la tonalitat del taronja en alguns punts per veure amb major claredat quins triangles queden dins el rang de quines càmeres.

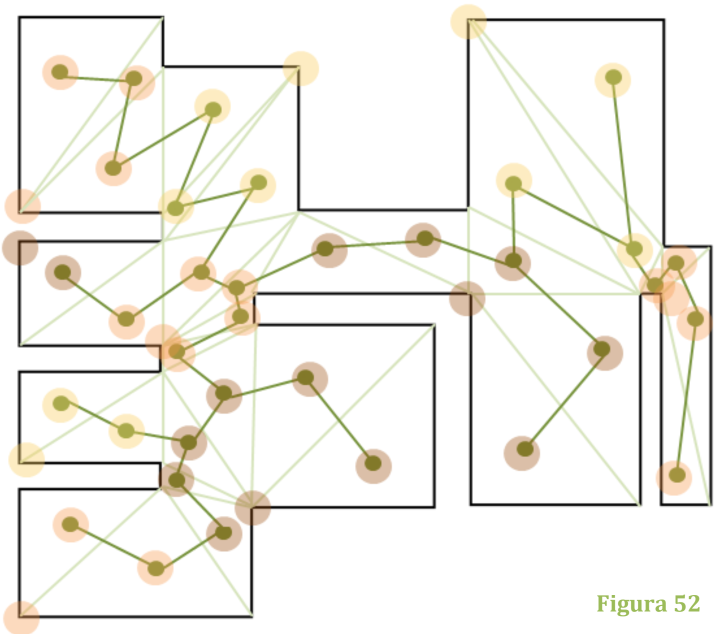


Figura 52

La solució a la pregunta: "quantes càmeres necessito per a un polígon de *n* costats?" és que mai serà un nombre superior a n/3. Després d'aquest exemple, veiem clar per què: si hem aconseguit dividir els vèrtexs en tres colors diferents, és impossible que el color que tingui menys vèrtexs sigui major al nombre de costats partit entre el nombre de colors.

En aquest cas tenim un polígon de 36 costats, així que el nombre de càmeres no hauria de ser superior a 36/3 = 12. El nombre que ens surt és inclús més petit: 10.

CONCLUSIONS

Crec que puc dir, després de mesos treballant en aquesta composició, que he aconseguit el que em proposava. El meu objectiu era investigar, amb tota la profunditat que em permet el meu nivell, un tema complex que té aplicacions molt i molt diverses a camps en què la meva experiència era pràcticament nul·la; aquest treball ha estat el meu intent.

Tot i que aquesta era la meta principal, no és això l'únic que m'enduc d'aquest treball. Escriure aquestes pàgines m'ha ajudat a pensar d'una manera més analítica i a reconèixer la importància de saber editar el contingut del que disposo. El gran avantatge que disposa la nostra generació és, sense cap dubte, la fantàstica eina d'Internet, però hem de saber com utilitzar-la. Tenim a les nostres mans una font il·limitada d'informació, i aquesta investigació m'ha ensenyat a aprendre a contrastar la informació abans d'escriure-la, i a resumir-la i explicar-la després.

Una altra de les dificultats amb les quals m'he trobat ha estat el fet que, tot i que la informació sobre la teoria de grafs no és ni molt menys escassa, està en gran part escrita en un llenguatge matemàtic massa complicat per entendre's amb el meu nivell de coneixement. És per això que, amb cada definició en llenguatge matemàtic, he escrit una explicació senzilla i més fàcilment comprensible per algú amb una base de matemàtiques similar a la meva; volia que el meu treball fos molt accessible, molt divulgatiu, que s'allunyés de la massa elaborada complexitat que abunda als textos acadèmics. He tingut la sort de comptar amb una tutora que m'ha ajudat allà on les recerques desesperades de símbols matemàtics a Viquipèdia no han pogut arribar.

A nivell més personal, aquests mesos d'endinsar-me en la teoria de grafs i la seva aplicació han reafirmat el meu objectiu d'estudiar un grau de matemàtiques a la universitat. Sé que hauré de treballar moltíssim per aconseguir-ho, però aquest treball m'ha ajudat a veure que realment és el que vull fer. En general, aquesta ha estat una experiència molt positiva de la qual m'emportaré moltes coses que faré servir durant la resta de la meva etapa acadèmica i de la meva vida laboral i personal.

BIBLIOGRAFIA

i. LA TEORIA DE GRAFS

1.1. INTRODUCCIÓ: EULER I EL PROBLEMA DELS PONTS DE KÖNIGSBERG

- https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg [26 de maig]

1.2. QUÈ ÉS UN GRAF? DEFINICIONS BÀSIQUES

- http://www.fmonje.com/UTN/Matematica%20Discreta/Grafos,%20D%C3%ADgrafos%20y%20%C3%81rboles.PDF [26 de maig]
- https://revistasuma.es/IMG/pdf/28/011-026.pdf [2 de juny]
- http://www-2.dc.uba.ar/personal/fbonomo/grafos/curso_grafos080909.pdf [2 de juny]
- http://ocw.upc.edu/sites/all/modules/ocw/estadistiques/download.php?file=334037/2012/1/54137/grafos-teoria-4760.pdf [2 de juny]

1.3. CARACTERITZACIÓ DELS GRAFS

1.3.1. GRAFS SIMPLES I MULTIGRAFS

- http://mathworld.wolfram.com/Multigraph.html [2 de juny]
- http://www.esacademic.com/dic.nsf/eswiki/831259 [2 de juny]

1.3.2. DIGRAFS

- http://www.cs.odu.edu/~toida/nerzic/level-a/digraph/definition.html [6 de juny]
- http://tareasmd.blogspot.com.es/2012/07/digrafos.html [6 de juny]

1.3.3. GRAFS CONNEXOS I INCONNEXOS

- http://teoriadegrafos.blogspot.com.es/2007/03/grafos-conexos.html [6 de juny]

1.3.4. GRAFS COMPLETS I INCOMPLETS

- https://www.ecured.cu/Grafo_completo [15 de juny]
- https://es.wikipedia.org/wiki/Grafo_completo [15 de juny]

1.3.5. GRAFS BIPARTITS

- http://teoriadegrafos.blogspot.com.es/2007/03/grafos-bipartidos.html [15 de juny]
- https://www.ecured.cu/Grafo_bipartido [15 de juny]
- https://es.wikipedia.org/wiki/Grafo_bipartito [15 de juny]

1.3.6. GRAFS PLANS

- https://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/tag/teorema-de-kuratowski/ [6 de juliol]
- https://www.youtube.com/watch?v=SQBuVpEXi9M [6 de juliol]
- https://es.wikipedia.org/wiki/Subdivisi%C3%B3n_(grafos) [6 de juliol]
- http://www.esacademic.com/dic.nsf/eswiki/539580 [6 de juliol]

1.3.7. HOMEOMORFISME DE GRAFS

- https://www.youtube.com/watch?v=ck7IK5welyU [17 de juliol]

1.3.8. ARBRES

- https://www.tutorialspoint.com/graph_theory/graph_theory_trees.htm [17 de juliol]
- http://www.monografias.com/trabajos98/arboles-y-grafos/arboles-y grafos.shtml [17 de juliol]
- http://www.esacademic.com/dic.nsf/eswiki/1480056 [17 de juliol]

1.4. GRAFS I MATRIUS

1.4.1. MATRIU D'ADJACÈNCIA

- http://matematicasies.com/Matriz-de-adyacencia-de-un-grafo [22 de juliol]

- http://www4.ujaen.es/~jfruiz/ALGEBRA2/PRACTICAS/NUMEROCAMINOS.pdf [22 de juliol]

1.4.2. MATRIU D'INCIDÈNCIA

- http://implementandografos.blogspot.com.es/2012/09/matriz-de-incidencia-definicion.html [25 de juliol]

ii. APLICACIONS DE LA TEORIA DE GRAFS

2.1. GEOGRAFIA I CIÈNCIES URBANES

2.1.1. CAMINS ÒPTIMS

- https://www.youtube.com/watch?v=fgdCNuGPJnw [21 d'agost]
- https://www.youtube.com/watch?v=607Y3dJGUHI [21 d'agost]
- https://www.youtube.com/watch?v=S_5W5bImTH4 [21 d'agost]
- https://www.youtube.com/watch?v=DfgaBkp02HY&t=250s [23 d'agost]

2.1.2. XARXES DE METRO

- https://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/tag/metro-de-londres/ [26 d'agost]

2.2. PSICOLOGIA I SOCIOLOGIA

- https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_grafos#Aplicaciones [5 de setembre]

2.3. TECNOLOGIA

2.3.1. XARXES SOCIALS

- http://queeranarchism.tumblr.com/post/158935794073/getting-rid-of-nazis-on-your-blog [5 de setembre]

2.3.2. QUANTES CÀMERES SÓN NECESSÀRIES PER VIGILAR CASA MEVA?

- https://www.youtube.com/watch?v=nEFYpwofbbk&t=93s [10 de setembre]