Premis Extraordinaris de Batxillerat. Convocatòria 2019-2020

Les proves es divideixen en **tres exercicis**:

- **Primer exercici** (1 hora i 30 minuts): comentari crític d'un tema general.
- **Segon exercici** (1 hora i 15 minuts): redacció en llengua estrangera.
- **Tercer exercici (1 hora i 30 minuts): matèria de modalitat**.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Etiqueta identificadora de l'alumne/a	Qualificació:

Instruccions

La prova consisteix en l'anàlisi d'una situació actual relacionada amb aquesta matèria. Haureu de redactar un text en què descrigueu i analitzeu alguns dels processos, factors i implicacions del context proposat, a partir de documents de suport i aplicant els vostres coneixements. En qualsevol cas podreu emprar els coneixements matemàtics que cregueu convenients per tal de resoldre el repte plantejat. S'avaluarà explícitament la capacitat d'escriure un informe coherent a partir de les idees matemàtiques pròpies sense emprar un esquema pregunta-resposta. Si s'han provat estratègies diverses abans de construir l'objecte definitiu, cal que ho indiqueu (s'avaluarà específicament).

Tots els raonaments, proves, conjectures i estratègies diferents emprades s'hauran de reflectir per escrit en aquest quadernet. Si necessiteu fulls per fer esborranys, el tribunal us en proporcionarà, i caldrà lliurar-los juntament amb el quadernet. La prova no es pot fer a llapis ni amb bolígraf esborrable.

Material

- Regle graduat.
- Calculadora (no s'autoritza l'ús de les que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre-la).

Criteris generals d'avaluació

- Identificar les matemàtiques implicades en la situació plantejada.
- Expressar la situació en llenguatge matemàtic utilitzant variables, símbols, diagrames...
- Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre la situació plantejada.
- Mantenir una actitud de recerca provant diferents estratègies i demostrant la capacitat de triar les solucions més senzilles, útils o elegants.
- Construir i expressar arguments que justifiquin el procés que s'ha seguit per resoldre la situació plantejada.
- Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió.

Una aplicació de les matrius

En aquesta petita recerca us proposem que feu servir allò que heu après sobre matrius en un nou context. A continuació trobareu dos petits textos en què s'explica com es poden relacionar les matrius amb el món d'Internet a través de l'ús de la teoria de grafs. Haureu de llegir els dos textos atentament i redactar un informe en què demostreu que heu entès el que aquí s'explica, tot contestant algunes preguntes que us farem.

Es valorarà que el vostre informe no estigui redactat en format de pregunta-resposta sinó que sigui un text que pugui servir per explicar com funciona l'algorisme Page Rank de Google, de posicionament d'una pàgina web.

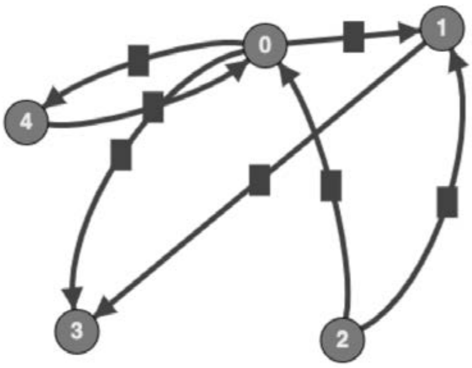
- Imagineu altres exemples de situacions entre pàgines web i feu servir grafs i matrius per representar-les. Com s'escriu la matriu d'adjacència a partir dels grafs? Què signifiquen els números que són elements d'aquestes matrius?
- Com podríem fer servir grafs i matrius per representar una pàgina web que tingui enllaços cap a si mateixa? I si hi ha més d'un enllaç entre dues pàgines?
- Quines característiques tindria un graf que representés una xarxa social com Facebook o Instagram? Quines implicacions tindria això en la matriu d'adjacència?
- En la situació que heu representat i després de diverses iteracions de l'algorisme de Page Rank, quina seria l'ordenació de les pàgines web?

Document 1

Grafs, matrius i la Worl Wide Web (www)

El món actual ens planteja reptes de diferent dificultat i categoria. Els models matemàtics ens ajuden a entendre i afrontar alguns d'aquests reptes. Un d'aquests models són els grafs, que a la seva vegada es poden representar fent servir matrius. Els grafs serveixen per representar adequadament diverses situacions i algunes d'elles són la World Wide Web i les xarxes socials.

Vegem-ne un exemple: si pensem en una situació en què el web en comptes de tenir milions de pàgines web, només en té cinc, ens podríem imaginar la següent situació:



Els nodes d'aquest graf, dibuixats amb boletes, representen les pàgines web del nostre internet imaginari amb només cinc pàgines web. Les connexions entre els nodes són els enllaços entre les diferents pàgines. Per exemple, aquí podem veure com tant la pàgina 0 com la dos contenen enllaços cap a la pàgina 1, però en canvi des de la pàgina 1 no podríem arribar a cap de les altres dues. També podem observar com les pàgines 0 i 4 contenen enllaços d'una cap a l'altra.

Les matrius ens serveixen per simplificar encara més la representació de la World Wide Web que ens donen els grafs. A continuació podeu veure la matriu d'adjacència del graf anterior, que ens serveix per modelitzar aquesta xarxa d'enllaços entre pàgines:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Text adaptat de Mireia López Beltrán i Pura Fornals Sánchez, *Una mirada distinta de las matrices*, 2019

Document 2

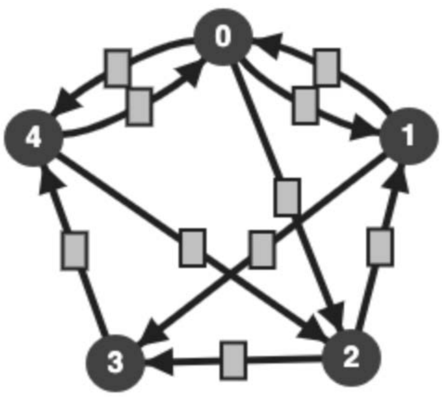
Google i Page Rank

Pels volts de l'any 1998 dos estudiants de la Facultat d'Informàtica de Stanford, Sergey Brin i Lawrence Page, van llançar el cercador Google en la seva primera versió. El motor de cerca de Google pretenia respondre al repte d'indexar, classificar i ajudar a cercar informació entre una quantitat cada vegada més ingent d'informació. Precisament el nom de Google procedeix del mot *googol*, en anglès, que fa referència a un nombre que s'escriu amb només cinc xifres, 10^{100}, però que és més gran que el nombre de partícules de l'Univers. Page Rank és l'algorisme que van crear aquests dos estudiants per ordenar les pàgines web.

En el món tecnològic la velocitat de resposta és un element essencial, però Brin i Page també van detectar que era essencial que les pàgines que recomanaven fossin realment útils segons la cerca realitzada. Aquestes recomanacions havien d'estar adequadament ordenades, de manera que l'usuari trobés el que buscava en les primeres entrades que es mostraven. Si l'usuari buscava "camisa", no volien donar únicament una llista de pàgines en què aparegués aquesta paraula, sinó mostrar entre els primers resultats aquells que siguin més útils. Per això van pensar que les pàgines que rebien més enllaços serien pàgines que potenciarien entre les més altes del rànquing. A més, no es valoraria igual una pàgina que tingués un enllaç a una pàgina considerada com a important que una que no el tingués. Els conceptes eren senzills i la dificultat radica a saber com assignar aquesta importància.

La proposta de Page Rank és que cada pàgina reparteixi uniformement la seva valoració entre totes les pàgines amb les quals té un vincle. D'aquesta manera, els enllaços tenen una ponderació que és directament proporcional a la importància de la pàgina d'origen i inversament proporcional al nombre d'enllaços d'aquesta pàgina. Així, una pàgina pot ser important encara que tingui pocs enllaços si aquests enllaços provenen de pàgines rellevants.

Vegem-ne un petit exemple. Tornem a imaginar-nos la web formada només per un petit conjunt de cinc pàgines representades amb els seus enllaços amb el següent graf:



Definim una matriu en què es recullen les característiques que s'han vist anteriorment, assignant a cada connexió una ponderació directament proporcional a la importància de cada pàgina d'on rep un enllaç i inversament proporcional segons el nombre d'enllaços que té. D'aquesta manera s'obté:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{i_2}{2} & 0 & 0 & \frac{i_5}{2} \\ \frac{i_1}{3} & 0 & \frac{i_3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{i_1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{i_5}{2} \\ 0 & \frac{i_2}{2} & \frac{i_3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{i_1}{3} & 0 & 0 & i_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquesta informació la podem representar també de la següent manera:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}$$

El primer vector (***i***) recull la importància de les pàgines en l'assignació inicial i en el segon vector (***I***) queden recollides la importància després de navegar-hi una vegada. En la primera navegació, la importància inicial vindrà donada pel següent vector:

$$\left(i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ i_5 \right) = (\ 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)\ ,$$

en què podem observar com els seus elements sumen 1, per tal de fer que totes les pàgines tinguin inicialment la mateixa probabilitat de ser la primera pàgina. Ara bé, després del primer pas s'obtindrà:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.167 \\ 0.167 \\ 0.2 \\ 0.267 \end{pmatrix}$$

I si continuem, després de deu passos, obtindrem el vector:

$$(0.2094, 0.1669, 0.1953, 0.1801, 0.2492)$$

Amb encara més iteracions es podria veure com no hi ha gaires canvis, perquè s'acaba arribant a un cert equilibri que ens dona l'ordenació que estàvem buscant amb els criteris que havíem establert: P5-P1-P3-P4-P2.

Text adaptat de Mireia López Beltrán i Pura Fornals Sánchez, *Una mirada distinta de las matrices*, 2019