

## Matemàtiques

### Criteris específics d'avaluació

La prova s'avaluarà seguint el criteri d'avaluació a tres nivells d'assoliment. Per tant, cada criteri pot valorar-se amb 1, 2 o 3 punts, excepte el criteri que fa referència a provar diferents estratègies i l'ús de la calculadora, que es valora amb 1 punt. La suma total de punts és de 14.

Entenem per error significatiu aquell error d'operació que distorsioni clarament algun resultat i generi una incoherència que l'alumne no detecti. També seran errors significatius els errors conceptuals o que mostrin una mancança de l'estudiant. Aquests tipus d'errors es penalitzaran explícitament.

Un error no significatiu serà aquell error d'operació que no implica una mancança de coneixement, sinó que és fruit d'un descuit fortuït. No es penalitzaran en cap moment els errors no significatius.

La suma dels punts totals és 14, per tant caldrà dividir la qualificació final entre 1,4 per tal d'ajustar-la al màxim estàndard de 10 punts.

Criteris d'avaluació	Indicadors	Valor	Total
<b>Identificar les matemàtiques implicades en la situació plantejada</b>	Identifica algun dels elements que permeten dissenyar i analitzar la capsa de galetes (el càlcul de superfícies i volums, la derivada, la segona derivada i les equacions).	1	3
	Identifica gairebé tots els elements que permeten dissenyar la capsa de galetes (el càlcul de superfícies i volums, la derivada, la segona derivada i les equacions) o bé els identifica però amb algun error significatiu.	2	
	Identifica el càlcul de superfícies i volums, la derivada, la segona derivada i les equacions com els elements matemàtics que permeten dissenyar una capsa de galetes i és capaç d'utilitzar-les amb correcció i coherència.	3	
<b>Expressar la situació en llenguatge matemàtic utilitzant variables, símbols, diagrames...</b>	No utilitza petits dibuixos de la capsa que ajudin a fer més comprensible els seus raonaments. Fa errors de llenguatge matemàtic o omet alguns símbols significatius.	1	3
	Utilitza de manera adequada el llenguatge matemàtic amb alguna deficiència poc significativa. Posa dibuixos però de manera insuficient.	2	
	Utilitza tota la simbologia matemàtica d'una manera acadèmicament correcta i afegint els dibuixos dels envasos i dels seus desplegaments necessaris per il·lustrar les seves idees.	3	

Críteris d'avaluació	Indicadors	Valor	Total
<b>Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre la situació plantejada</b>	És capaç de demostrar correctament la validesa o no de la hipòtesi inicial, és a dir que la capsa és millorable.	1	3
	A més de corroborar la validesa de la hipòtesi troba correctament la capsa de base quadrada.	2	
	A més de corroborar la hipòtesi i trobar la capsa de base quadrada, fa una proposta de capsa alternativa que calcula i valora correctament. La puntuació serà màxima encara que la proposta que faci no aconsegueixi millorar la de la base quadrada però en la qual faci un plantejament coherent.	3	
<b>Usar amb soltesa la calculadora</b>	El fet que el problema estigui basat en una capsa comercial real fa que els càlculs depenguin directament de la calculadora i, per tant, es valorarà la capacitat d'expressar les solucions obtingudes amb la calculadora. L'ús de la calculadora ha de ser productiu (permet trobar solucions) i reflexiu (es valoren adequadament les solucions que s'obtenen, mantenint-se crític amb resultats erronis absurds i aplicant un arrodoniment coherent).	1	1
<b>Mantenir una actitud de recerca provant diferents estratègies i demostrant la capacitat de triar les solucions més senzilles, útils o elegants</b>	Fa o comenta raonadament més d'una capsa alternativa per tal d'intentar trobar la millor solució. És possible que per manca de temps cap alumne (o gairebé cap) faci més d'una capsa alternativa. En aquest cas, es demana preponderar totes les notes sense penalitzar aquest aspecte per tal de no perjudicar la nota final dels estudiants.	1	1
<b>Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió</b>	S'expressa de manera poc entenedora i desordenada. Tot i trobar solucions correctes, no en treu conclusions ni les comenta.	1	3
	Redacta correctament i ordenada els seus raonaments, però utilitza un esquema pregunta-resposta, sense elaborar un discurs raonat i coherent més propi d'un informe. Anomena quina és la capsa òptima i amb quina forma de galeta, però sense treure'n conclusions, donar motius ni afegir possibles alternatives.	2	
	S'expressa amb molta claredat, amb coherència i fluïdesa. Redacta raonadament les seves conclusions, comentant quina és, al seu parer, la millor capsa de galetes i per què, així com quina ha de ser la forma de la galeta.	3	

## criteris específics d'avaluació complementaris. Exemple de resolució

### *La hipòtesi*

- **Determineu una hipòtesi prèvia**, que respongui a la pregunta “Les capsas de galetes són respectuoses amb el medi ambient, és a dir utilitzen la mínima quantitat de cartró possible?”. (La hipòtesi pot no ser certa, únicament cal expressar una opinió prèvia raonada.)

Un dels criteris tant generals com específics és “Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió”. Tot i que hi ha un apartat concret en el qual es demana la defensa de la capsa i en què es pot fer una observació més concreta d'aquest criteri, es valorarà aquest aspecte en la totalitat de la prova. L'alumne ha de ser capaç de contestar en format d'informe amb una redacció contínua i fluida i no amb un esquema pregunta-resposta inconnex, incoherent, desordenat i poc explícit.

Per exemple, cal començar a escriure explicant (breument) quina és la intenció de la recerca, quina és la hipòtesi inicial i per què, etc.

### *Comprovem la hipòtesi*

- **Expliqueu raonadament si es compleix, o no, la hipòtesis** de la recerca, és a dir si és possible, o no, millorar el rendiment ecològic de la capsa de cartró de les galetes.

Suggeriment:

- Amb un mateix rectangle de cartró de 25 x 32 cm **trobeu una nova forma de doblegar-lo de manera que el volum sigui màxim i que es comprovi que realment és un màxim**. (recordeu no tenir en compte les pestanyes per apegar la capsa per tal de simplificar els càlculs).

Aquest és un problema d'optimització que depèn d'una sola variable,  $x$  = amplada de la capsa. El volum de la capsa es pot trobar amb l'expressió

$$V = x(16 - x)(25 - x) = 400x - 41x^2 + x^3$$
$$V' = 3x^2 - 82x + 400 = 0$$

d'on  $x = 20,98$  o bé  $x = 6,26$ .

Amb la segona derivada veiem que  $V'(6,36) < 0$  i, per tant, es tracta del màxim.

Amb aquest valor de  $x$  es pot construir una capsa que faria:  $V = 6,37 \times 9,64 \times 18,64 = 1\,160,6 \text{ cm}^3$ , que millora lleugerament el volum de la capsa original, que era  $V = 1\,100 \text{ cm}^3$ .

*Reinventem la capsa de galetes. Primera proposta*

- **Feu una proposta d'una capsa de galetes nova que mantingui el volum de galeta i en la que hi hagi un únic paquet de galetes quadrades i en la que s'utilitzi la mínima quantitat possible de cartró. En l'informe explicatiu, valoreu la funcionalitat d'una galeta d'aquest tipus i si s'escau feu algun altra proposta.**

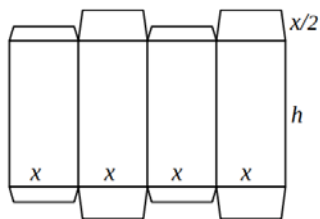
Suggeriment

- Calculeu primer el volum dels dos cilindres de galetes, prenent com a variables l'amplada de la galeta quadrada i l'altura. La restricció serà el volum fix.
- Trobeu la funció de la superfície amb aquests variables, reduïu a una única variable i minimitzeu la superfície.

Ara, en comptes de maximitzar el volum hem de minimitzar la superfície amb la restricció del volum:  $V = 2(\pi \times 2,5^2 \times 19) = 746 \text{ cm}^3$ . Cal treballar amb coherència en el context i, per tant, s'hauria d'arrodonir a l'alça perquè s'ha de deixar una mica més d'espai a la capsa. Per tant, és correcte qualsevol valor entre 745 i 790 (si s'agafa 20 cm d'altura el volum és  $785 \text{ cm}^3$ ). Per exemple, es pot considerar  $750 \text{ cm}^3$ . No penalitzarà si no arrodoneixen, però sí que es valorarà positivament un arrodoniment raonat.

Ara la capsa depèn de dos paràmetres, el volum serà:

$$V = x^2 \cdot h = 750 \text{ cm}^3$$



d'on:

$$h = \frac{750}{x^2} = S = 4x(h + x) = 4x\left(\frac{750}{x^2} + x\right) = \frac{3000}{x} + 4x^2$$

$$\text{derivant: } S'(x) = \frac{-3000}{x^2} + 8x = 0,$$

d'on:  $x = 7,21 \text{ cm}$ , que és un mínim perquè  $S''(7,21) > 0$ .

Aquest valor genera unes mides òptimes per a la capsa:

amb una superfície de  $4 \times 7,21(14,42 + 7,21) = 623,8 \text{ cm}^2$ , que redueix molt notablement la superfície de la capsa original de  $S = 25 \times 32 = 800 \text{ cm}^2$ .

El problema d'aquesta solució és la mida de la galeta, que és massa gran.

L'informe hauria de mencionar-ho proposant una galeta alternativa que s'ajusti a aquesta capsa, com per exemple galetes rectangulars de  $7,21 \times 3,6$  o també galetes amb forma de triangle rectangle; en qualsevol cas, probablement la solució passa per continuar posant dos paquets de galetes dins la capsa.

*Reinventem la capsa de galetes. Segona proposta*

- **Feu una nova proposta totalment lliure intentant aconseguir el mateix volum i encara menys cartró. Cal que triar la forma de la galeta i de la capsa.** Intenteu triar una de la nova galeta que no sigui massa diferent, en volum, al l'original
- Encara que s'aconsegueixi millorar la "segona proposta" **es recomana afegir-ne una tercera diferent per tal de millorar-la encara més.** En qualsevol cas cal incloure a l'informe tots els intents, recordeu que una dels criteris que es valoraran explícitament és *Mantenir una actitud de recerca provant diferents estratègies i demostrant la capacitat de triar les solucions més senzilles, útils o elegants.*

En un problema obert es pot observar la capacitat crítica, creativa, de raonament i d'anàlisi. El primer aspecte que s'ha d'analitzar és el fet que, tal com s'indica en les observacions, el problema depèn de tres variables i, per tant, s'ha d'incloure una restricció arbitrària i creativa que permeti resoldre el problema. Pot ser que la decisió presa no millori el resultat obtingut anteriorment; en aquest cas es fa necessari provar una altra opció.

Algunes respostes possibles són:

- Analitzar la diferència de superfície amb galetes quadrades però posant un sol paquet o tres paquets. En el cas que es posi un paquet quadrat la mida de la galeta possiblement quedarà massa gran i s'hauria de considerar la possibilitat de posar dos paquets rectangulars o bé tres paquets de galetes quadrades.
- Posar quatre paquets de galetes quadrades no alineats i generar un paquet de base quadrada.
- Considerar galetes triangulars equilàteres i provar amb un, dos, tres... paquets, i fer una capsa de base trapezoïdal.
- Fer una capsa de base hexagonal que encabeixi sis paquets de galetes triangulars.
- La possibilitat d'una capsa cilíndrica no s'adequa al problema perquè aquesta capsa no té un desplegament pla òptim que permeti estalviar i muntar la capsa, a més es desaprofita espai en el transport. En tot cas, el fet que la resposta sigui lliure permet desenvolupar aquesta alternativa però no es pot valorar de la mateixa manera.

Un dels aspectes que condiciona la solució és la quantitat de paquets que acabarem posant. Tant l'original com el cas anterior originen una capsa de 2 paquets, sembla lògic intentar una capsa de 2 paquets quadrats. Vegem amb més detall com seria aquesta solució.

En aquest cas,  $V = 2x^2 \cdot h$ ;  $h = \frac{750}{2x^2} = \frac{375}{x^2}$

hem de minimitzar la superfície:

$$S = 6x(h + x) = 6x \frac{375}{x^2} + 6x^2 = \frac{2250}{x} + 6x^3$$

Derivant:

$$S'(x) = \frac{-2250}{x^2} + 12x = 0$$

d'on  $x = 5,72$ , que és una mida de galeta una mica gran però força raonable.

L'altura de la capsa hauria de ser  $h = 11,4$ , exactament igual que l'amplada.

Amb aquestes dades, la superfície seria de  $34,32 \times 17,1 = 584,8 \text{ cm}^2$ , que suposa una millora extraordinària. De fet, no és possible millorar la superfície si la capsa és ortoèdrica.

- **Redacteu un escrit de defensa de la capsa** en què indiqueu raonadament quines seran les seves virtuts pel que fa a la seva forma, usabilitat, emmagatzematge, estètica, etc., Indiqueu també quins defectes de disseny li trobeu, especificant les modificacions què faríeu al disseny si disposéssiu de més temps

En tota proposta d'un disseny creatiu és necessari una defensa del producte final. Aquesta defensa ha de quedar integrada en el format "informe" i ha de ser coherent amb tot el context del problema. A més, es poden tractar temes col·laterals com és el transport, l'emmagatzematge, aspectes estètics, etc.