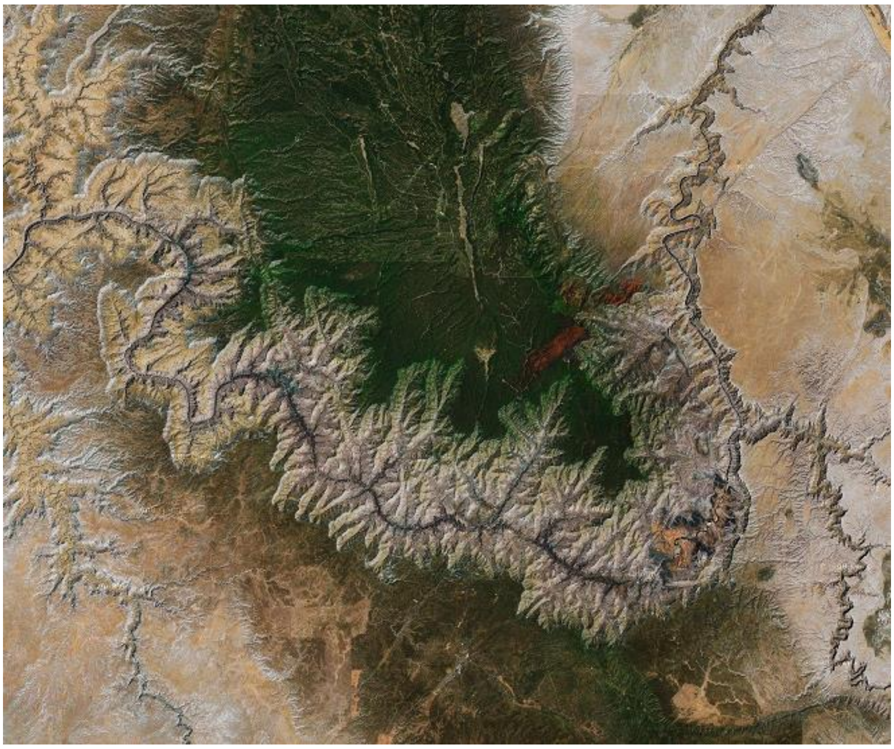
# FRACTALS: LA GEOMETRIA DE LA NATURALESA



**Nom:** Marc Pascual Roig

**Tutor:** Joan Pitarque

Institut Bernat el Ferrer

21-12-2016

## ÍNDEX


INTRODUCCIÓ ... 3

1. GEOMETRIA EUCLIDIANA I GEOMETRIA FRACTAL ... 5
2. FRACTALS ... 6
   - 2.1. DEFINICIÓ DE FRACTAL ... 6
   - 2.2. CARACTERÍSTIQUES DELS FRACTALS ... 8
     - 2.2.1 Autosimilitud ... 8
     - 2.2.2 Estructura complexa a qualsevol escala ... 9
     - 2.2.3. Infinitud ... 9
     - 2.2.4. Dimensió fractal ... 9
3. CREACIÓ DE FRACTALS MITJANÇANT UNA ITERACIÓ ... 10
4. CLASSIFICACIÓ DELS FRACTALS ... 11
5. FRACTALS NATURALS ... 12
6. APLICACIONS ACTUALS DELS FRACTALS ... 14
7. DIMENSIÓ FRACTAL ... 15
   - 7.1. DIMENSIÓ TOPOLÒGICA ... 15
   - 7.2. CÀLCUL DE LA DIMENSIÓ D'UN OBJECTE A PARTIR DE L'AUTOSIMILITUD (DIMENSIÓ DE HAUSDORFF) ... 15
   - 7.3. DIMENSIÓ MINKOWSKI ... 17
8. LÍMITS I SUMATORIS ... 18
9. ANÀLISI DE DIFERENTS FRACTALS ... 20
   - 9.1. CONJUNT DE CANTOR ... 20
   - 9.2. CORBA DE KOCH ... 23
   - 9.3. FLOC DE NEU DE KOCH ... 25
   - 9.4. TRIANGLE DE SIERPINSKI ... 30
   - 9.5. ESPONJA DE MENGER ... 33
10. CONJUNT DE MANDELBROT ... 39
    - 10.1. NOMBRES COMPLEXOS ... 39
    - 10.2. PROPIETATS I CONSTRUCCIÓ DEL CONJUNT DE MANDELBROT ... 40

PART PRÀCTICA: IDENTIFICACIÓ DE FRACTALS A MOLINS DE REI ... 45

1. GEOGRAFIA DE MOLINS DE REI ... 45

**1.1. RIUS I CAMINS** .......... 46
**1.2. FRONTERA** .......... 48
**2. ALTRES CASOS DE FRACTALS** .......... 53

**CONCLUSIONS I OPINIÓ PERSONAL** .......... 56

**BIBLIOGRAFIA** .......... 58

## INTRODUCCIÓ

Quan explicava que estava fent un treball sobre fractals, la resposta acostumava a ser: “Què és un fractal?”

Doncs bé; les línies, corbes i figures que observem no són realment línies o corbes de la geometria euclidiana, sinó que són unes estructures molt més complexes anomenades fractals. El que pot semblar un núvol rodó, ondulat,... és realment una estructura geomètrica amb unes característiques totalment diferents. És a dir, si ens preguntéssim com podríem mesurar i treballar matemàticament cossos naturals amb la màxima precisió, la resposta seria mitjançant l’anàlisi dels patrons fractals que presenten aquests cossos. Per tant, totes les figures geomètriques que coneixem són un instrument per fer aproximacions de la realitat; en canvi, els fractals ens permeten descriure la realitat amb molta més precisió i complexitat. Malauradament, però, els fractals no són massa coneguts.

Aquests objectes van ser descoberts per un matemàtic polonès de nom Benoît Mandelbrot recentment, al 1.977. A partir del seu descobriment, la importància dels fractals ha anat en augment per la seva gran utilitat. Com que la geometria fractal permet explicar cossos i objectes naturals i veure’n les seves característiques, també rep el nom de geometria de la naturalesa. A més, però, els fractals tenen una aplicació i importància cabdal en l’evolució de molts àmbits científics.

Per altra banda, matemàticament els fractals són uns objectes amb unes propietats úniques i impressionants que van en contra de la nostra intuïció.

Pel que fa als motius de tria, he de dir que no hi ha hagut un motiu principal pel qual he decidit realitzar el treball sobre aquest tema. Bàsicament, tenia en ment fer un treball relacionat amb les matemàtiques i em van sorgir diversos temes, i finalment vaig decantar-me pels fractals. Des d’un inici, els fractals m’havien semblat objectes curiosos i interessants i em van cridar l’atenció. A més, és un apartat de les matemàtiques que no té res a veure amb el que es fa habitualment i això em va animar encara més.

Els objectius que em vaig plantejar al començar el treball, pel què fa al tema, van ser els següents: primerament, volia entendre i poder distingir un fractal a partir de les seves característiques i propietats, i així ser capaç d'analitzar fractals a partir d'aquests coneixements. Un cop hagués assolit el primer objectiu, volia conèixer casos i aplicacions reals d'aquestes figures en diferents àmbits. M'interessava especialment els casos de fractals a la naturalesa, ja que em va semblar una relació que resulta en figures excepcionals.

També em vaig plantejar objectius referents a la realització del treball en si: ser capaç de realitzar un treball rigorós i interessant, que aportés coneixement sobre els fractals de manera clara, per tal de posar aquest coneixement accessible a tothom. A més, des d'un inici el meu tutor i jo ens vam plantejar fer una part pràctica que aportés nova informació, i d'aquí neix l'estudi de la relació entre els fractals i Molins de Rei.

Per acabar, centraré la part pràctica sobre la hipòtesi-pregunta següent: serè capaç de trobar patrons fractals a Molins de Rei? I si és així, en quina quantitat i en quins llocs en puc trobar, i quines característiques tindran? Tot i que més o menys m'esperava quina seria la resposta a aquestes preguntes, el més interessant seria trobar casos de fractals que no m'esperés en absolut i poder posar en pràctica els coneixements adquirits a la part teòrica en casos reals.

## 1. GEOMETRIA EUCLIDIANA I GEOMETRIA FRACTAL

Abans de parlar de fractals cal fer referència a la geometria clàssica o euclidiana. D'aquesta manera podrem veure les diferències i els errors que presenta la geometria tradicional envers a la geometria fractal, quan es tracta de descriure la realitat. D'aquesta manera veurem la importància dels fractals i la seva geometria en el panorama actual.

La geometria clàssica o euclidiana va ser descrita per Euclides fa més de vint segles – no és estrany, doncs, que hagi sorgit un nou paradigma després de tants anys – i es basa en 5 postulats:

1. Es pot traçar una recta entre dos punts diferents qualsevols.
2. Un segment rectilini sempre pot ser prolongat.
3. Amb un centre i radi donats només pot haver-hi una circumferència.
4. Tots els angles rectes són iguals.
5. Si una secant talla dos rectes i els angles interiors d'un costat sumats mesuren menys de cent-vuitanta graus, aquelles rectes es tallaran per aquell costat.

Aquests postulats permeten realitzar càlculs de longitud, àrees, superfícies,... de punts, línies, corbes, esferes,.. perfectes, però que no deixen de ser una idealització de l'home, una aproximació de la realitat i de les formes naturals, que en realitat són irregulars i no pas planes o llises.

És per això que Benoît Mandelbrot es va veure obligat a mirar la geometria des d'un altre punt de vista. Fins aleshores, apartats de les matemàtiques com la trigonometria esfèrica (que no complex l'últim postulat d'Euclides), s'havien considerat excepcions poc importants i infreqüents en les matemàtiques. Així doncs, tot i que els fractals ja havien aparegut en els estudis de diversos matemàtics, aquests havien estat considerats "monstruositats de les matemàtiques", figures excepcionals que no mereixien cap reconeixement.

Aquest matemàtic polonès va observar l'aparició de fractals en l'estudi de pertorbacions elèctriques. El seu estudi dels patrons que seguien aquestes pertorbacions elèctriques i del conjunt de Julia, entre d'altres, van ser claus en l'evolució d'aquest camp. A més, Mandelbrot va observar que figures naturals, per exemple els arbres, seguien un patró similar al dels fractals que havia estudiat.

Per tant, la geometria fractal reemplaça els elements de la geometria clàssica com les rectes, punts o corbes per aquests elements anomenats "fractals", que permeten fer una aproximació molt més realista de la naturalesa. Per això, la geometria fractal també es coneix com la "Geometria de la naturalesa".

*Imatge 1: les serralades segueixen un patró fractal*

## 2. FRACTALS

### 2.1. DEFINICIÓ DE FRACTAL

Mandelbrot va ser el primer en utilitzar el terme fractal, al 1.977, per descriure aquests objectes geomètrics irregulars. Tot i així, cal dir que no va ser el primer a treballar-los, ja que ja hi havia elements amb les propietats dels fractals prèviament, com el triangle de Sierpinski o el conjunt de Cantor, o altres matemàtics com Peano o el mateix Cantor ja havien definit alguns objectes catalogables dins de la categoria de fractals. A més, també es coneix l'existència de fractals amb finalitats artístiques, com en gravats japonesos del segle XIV.

Així doncs, tot i que es coneixien els fractals des de segles enrere, no va ser fins fa pocs anys que se'ls va posar nom i es va començar a veure la seva importància en diferents apartats de les matemàtiques – doncs sempre s'havien considerat excepcions de les matemàtiques per la seva raresa i complexitat - en especial, la geometria.

Actualment, hi ha diverses definicions per al terme "fractal". Algunes són aquestes:

- Mandelbrot va anomenar aquests objectes "fractals", paraula que prové del terme llatí "fractus", que significa fragmentat, fracturat o trencat.

  La definició que va donar el matemàtic és la següent: "els fractals són curiosos objectes geomètrics generats per la iteració infinita d'un algoritme". Més tard veurem com crear fractals a partir d'aquest mètode.

- Segons el diccionari.cat la paraula fractal té la següent definició: "Model matemàtic o objecte real que manté la seva forma essencial, fragmentada i irregular, tot i variant l'escala d'observació." Això dóna lloc al concepte d'autosimilitud, que explicarem més endavant.

Tot i així, la millor manera de definir aquest terme és a partir de les seves característiques.

Kenneth Falconer, en la seva obra "Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications", va definir fractal com un conjunt "F" que compleix alguna de les característiques o propietats següents; si es compleix alguna podem considerar que aquell objecte és un fractal:

1) "F" té una estructura fina, és a dir, detall a escales arbitràriament petites.

2) "F" és massa irregular per ser descrit en llenguatge geomètric tradicional.

3) "F" té alguna forma d'autosimilitud.

4) La dimensió fractal de "F" és major que la seva dimensió topològica.

5) "F" es defineix d'una manera molt simple de manera recursiva.

## 2.2. CARACTERÍSTIQUES DELS FRACTALS

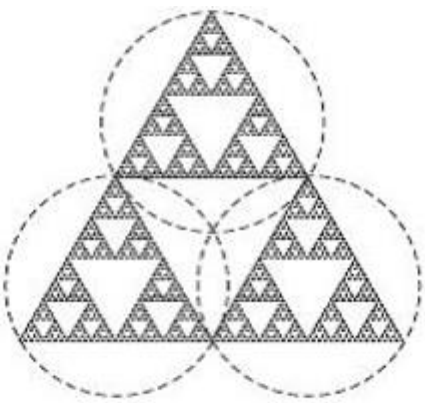
Els fractals tenen unes característiques força curioses, que fan que siguin especials respecte altres objectes geomètrics.

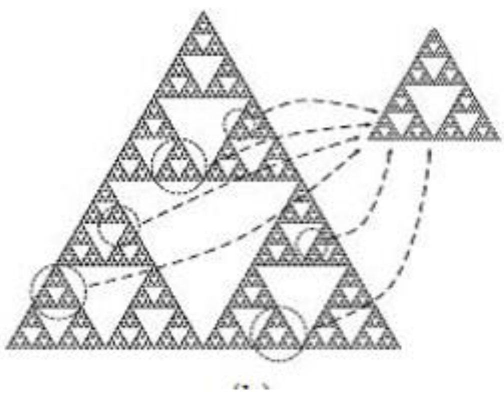
Les característiques més conegudes dels fractals són les següents:

### 2.2.1 Autosimilitud

Una de les característiques principals dels fractals és que una porció del fractal s'assembla o és idèntica al tot. Podem distingir tres classes d'autosimilitud:

- Autosimilitud exacta: el fractal és exactament idèntic a diferents escales; per tant, els subconjunts de tot el fractal són idèntics al fractal en si en estructura, mides,...
- Quasi-autosimilitud: en aquest cas, els subconjunts del fractal són molt semblants al tot, però apareixen lleugerament distorsionats, pel que no són exactament idèntics.
- Autosimilitud estadística: en l'últim cas d'autosimilitud, l'únic que es conserva a diferents escales són mesures numèriques o estadístiques.





*Imatge 2: Triangle de Sierpinski*

En aquesta imatge veiem un exemple d'autosimilitud en el triangle de Sierpinski. Si augmenten l'escala d'una de les tres parts idèntiques en les que es pot dividir el fractal, observem que aquesta part del fractal és exactament idèntica al tot, i així successivament.

### 2.2.2 Estructura complexa a qualsevol escala

Aquesta propietat és un resultat de l'autosimilitud i recursivitat dels fractals. Al tenir aquestes característiques, els fractals estan formats per estructures molt complexes a qualsevol escala. Mai aconseguirem arribar a una forma definida, ja que la recursivitat dels fractals és infinita, i, per tant, cada cop que augmentem l'escala ens trobarem davant d'una figura encara més complexa i precisa.

### 2.2.3. Infinitud

També com ha resultat de les característiques anteriors, els fractals són objectes infinits, ja que la seva estructura es repeteix a diferents escales indefinidament. A més, els fractals poden arribar a tenir un perímetre o llargada infinits.

### 2.2.4. Dimensió fractal

Tots sabem que un punt no té cap dimensió, una línia té una dimensió, un quadrat en té dos, i un cub tres; i fins i tot algun cop hem sentit a parlar de la dimensió espai-temps. Però és possible que un objecte tingui una dimensió que no sigui un nombre enter?

Doncs sí. Una de les peculiaritats dels fractals és que acostumen a tenir una dimensió irracional; és a dir, no tenen una dimensió exacta.

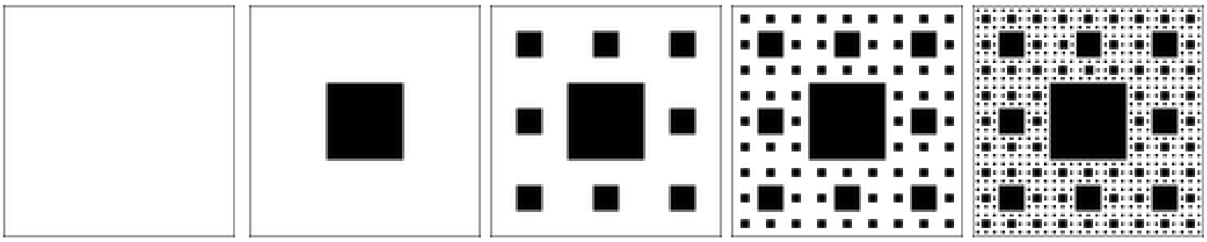
Com a conclusions d'aquestes característiques, es pot dir que els fractals segueixen una estructura geomètrica recursiva, cosa que crea la paradoxa de que tenen una estructura i complexitat infinites, encara que estan en un espai finit.

## 3. CREACIÓ DE FRACTALS MITJANÇANT UNA ITERACIÓ

Acabem de veure que una de les principals característiques dels fractals és l'autosimilitud i un detall que es manté fins l'infinit. Per crear un fractal hem de considerar aquesta autosimilitud que tenen a qualsevol escala, i veurem que no és tant difícil com sembla.

Per generar el fractal necessitem definir els conceptes següents:

- Una llavor: qualsevol objecte geomètric, senzill, a partir del qual es generarà el fractal.
- Un algoritme o regla d'iteració: és l'ordre que és aplicada a la llavor (Pot ser qualsevol operació).
- Un procés d'iteració: si repetim infinitament l'algoritme a la llavor aconseguirem que l'objecte tingui una precisió infinita a qualsevol escala, a més de l'autosimilitud.
- Finalment, anomenarem òrbita a l'objecte resultant.



*Imatge 3: Catifa de Sierpinski*

Per entendre millor com es genera un fractal, veurem l'exemple de la catifa de Sierpinski.

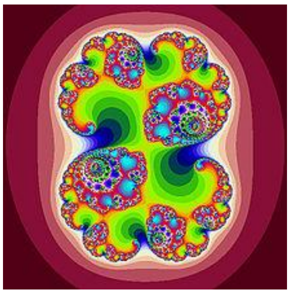
En aquest cas, la llavor (l'objecte inicial) és un quadrat de color blanc.

L'algoritme que apliquem podria ser: "dividir el quadrat en nou quadrats idèntics i pintar de negre el del centre".

Finalment, aplicant el procés d'iteració (realitzant l'algoritme una i altra vegada), obtindrem una figura semblant a l'última imatge.

Durant aquest procés també podem utilitzar diferents mètodes de coloració per assignar colors a diferents parts del fractal. Un seria mitjançant un "algoritme d'escapament", que en funció de la iteració en que es troba cada part del fractal tindria un color o un altre. Per exemple, els elements de la primera iteració podrien ser grocs, els de la segona verds,..

Tots aquests processos es poden realitzar mitjançant diferents programes informàtics que s'han creat exclusivament per generar fractals.



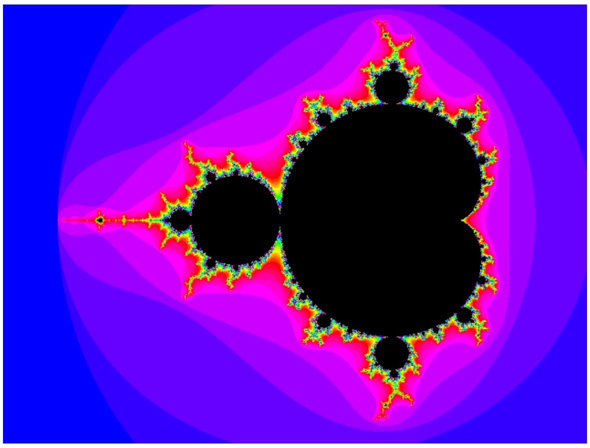
*Imatge 4: coloració del fractal*

## 4. CLASSIFICACIÓ DELS FRACTALS

Tot i que els fractals són objectes molt complexos i difícils de classificar, podem trobar dues classes diferents de fractals segons si la seva autosimilitud és perfecta o no:

- Fractals lineals: Els fractals lineals són exactament idèntics en totes les seves escales fins a l'infinit, per tant, la seva autosimilitud és exacta i veuríem el mateix objecte a diferents escales – seria impossible distingir l'escala al veure dues fotografies a diferent escala del fractal. Generalment, aquests fractals es generen a partir d'objectes geomètrics tradicionals

- Fractals no lineals: són aquells que es generen a partir de distorsions complexes o no lineals. Per aconseguir un fractal no lineal intervenen fórmules amb nombres complexos en el seu procés d'iteració. Aquests fractals no tenen una autosimilitud exacta i són els que trobem majoritàriament a la natura.



*Imatge 5: Conjunt de Mandelbrot*

Un exemple seria el conjunt de Mandelbrot, com podem veure a la imatge. A més, aquests fractals estan especialment relacionats amb la Teoria del Caos, ja que és impossible de determinar quin serà el resultat, com en "l'efecte papallona".

## 5. FRACTALS NATURALS

Com ja hem dit, la geometria fractal és la geometria de la naturalesa. De fet, la geometria fractal és molt més exacta que la geometria tradicional en diverses situacions, i permet fer càlculs molt més realistes i precisos, amb un marge d'error molt més petit. Tot i així, la geometria fractal no deixa de ser una aproximació de la realitat, ja que en les situacions naturals la iteració no és infinita ni l'autosimilitud és perfecta.

Una frase del mateix Mandelbrot -"Els núvols no són esfèrics, les muntanyes no són còniques, ni les costes circulars, ni l'escorça llisa, ni tampoc el raig viatja en línia recta"- remarca la feblesa de la geometria euclidiana i que, en canvi, els fractals són molt més presents del que ens pensem.

A continuació alguns exemples de fractals a la natura:

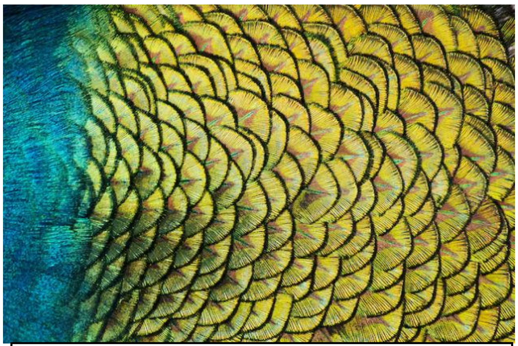
*Imatge 6: Closca*

*Imatge 7: Bròquil romanesc*

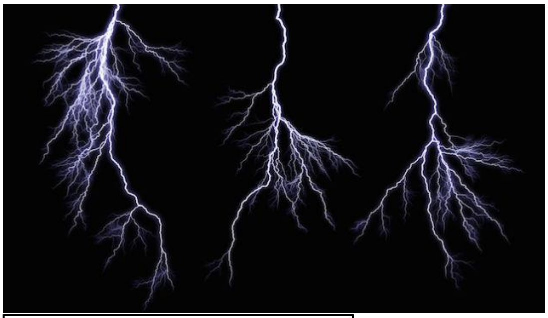
*Imatge 8: Falguera*

*Imatge 9: Floc de neu*

Imatge 10: Esquerdes



Imatge 11: Plomes de gall d'indi



Imatge 12: Llamps

Imatge 13: Núvols

Aquests són alguns exemples, però també existeixen estructures fractals a l'Univers, en la distribució de les estrelles i de les galàxies; en el perímetre de les costes marítimes i de les serralades; en els rius i els seus afluents o en les cascades.

Però també nosaltres, els humans, tenim nombroses estructures fractals: el conjunt de vasos sanguinis del sistema circulatori, els bronquis, bronquíols i alvèols en els pulmons; o en les dendrites de les neurones.

Veiem, doncs, que a la natura l'aparició de fractals és molt abundant. Com ja hem dit, en cap cas aquests són fractals com a tal, ja que la seva recursivitat és finita. Tot i així, és molt més aproximat i correcte classificar-los com a fractals que com a objectes de la geometria euclidiana.

## 6. APLICACIONS ACTUALS DELS FRACTALS

Hem vist que els fractals són presents a la natura, però deixant a una banda la seva utilitat per entendre millor el món natural que ens rodeja (generar paisatges naturals, calcular distàncies de costes,...) quina altra utilitat tenen els fractals?

Doncs la veritat és que els fractals tenen múltiples funcions en diversos àmbits, especialment científics.

En les matemàtiques pures podem veure fractals en la geometria, i en models més teòrics podem trobar fractals, per exemple, amb la finalitat d'aproximar arrels mitjançant el fractal de Newton.

A la física tenen utilitat en la meteorologia i en l'estudi de ràfegues de vent. En la química es poden trobar figures fractals com a resultat d'experiments que tenen unes propietats molt curioses o en processos de la indústria química.

En la medicina, els sistemes del nostre cos amb propietats fractals han pogut ser estudiats amb molt més detall gràcies a la geometria fractal per tal de detectar malalties, per exemple, en els pulmons o en el cervell. La geologia també s'ha vist beneficiada en l'estudi de falles, terratrèmols o models fluvials. En la biologia han permès entendre amb més detall espècies que presenten les característiques dels fractals.

En un entorn tecnològic, els enginyers no han parat de treure bon profit als fractals, tant en la codificació de senyals d'àudio, vídeo o digital, com en la compressió d'imatges o la creació d'antenes fractals (molt més eficients que les normals).

Altres funcions dels fractals les trobem en la seva utilitat en els mercats i l'estudi de la borsa de valors; en l'arquitectura podem trobar estructures fractals; també s'utilitzen els fractals en un pla més artístic, ja que la seva autosimilitud i recursivitat li donen unes propietats especials. A més, també podem utilitzar els fractals per generar patrons musicals.

Per tant, els fractals són presents en diversos àmbits i han permès l'evolució de diferents camps.

## 7. DIMENSIÓ FRACTAL

Com ja hem explicat, una de les peculiaritats dels fractals és la seva dimensió. A continuació veurem com mesurar la dimensió de qualsevol objecte, ja sigui un objecte euclidià o fractal.

### 7.1. DIMENSIÓ TOPOLÒGICA

La dimensió topològica és la dimensió amb la que mesurem els objectes de la geometria euclidiana. Com ja sabem, un punt no té cap dimensió, un segment tindria una dimensió, qualsevol objecte amb superfície en tindria dues, i els objectes amb volum, tres.

### 7.2. CÀLCUL DE LA DIMENSIÓ D'UN OBJECTE A PARTIR DE L'AUTOSIMILITUD (DIMENSIÓ DE HAUSDORFF)

Hi ha diverses definicions de dimensions. Per exemple, podem saber la dimensió d'un objecte si es compleix la regla següent: en la primera dimensió ens podem moure endavant i endarrere; en dues, a més, cap a l'esquerra o la dreta; i finalment en tres ens podem moure en qualsevol d'aquestes direccions i cap amunt i avall.

Però per calcular la dimensió d'un fractal necessitem anar més enllà.

Per aconseguir una fórmula que ens permeti conèixer la dimensió dels fractals utilitzarem les incògnites següents i mirarem de relacionar-les d'alguna manera:

n = nombre de peces autosimilars

m = factor d'ampliació

d = dimensió

A) Primer, observem que passa quan ens situem en una dimensió:

S'observa que si dividim un segment en quatre d'autosimilars, cada fragment és quatre vegades més petit que el segment inicial. Per tant:

n = 4

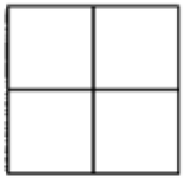
m = 4

d = 1

B) Ara en dues dimensions:

Si dividim un quadrat en quatre quadrats idèntics, s'observa que la relació entre els costats dels quadrats és el doble, per tant, el factor d'ampliació serà dos. Per tant obtenim que:

n = 4



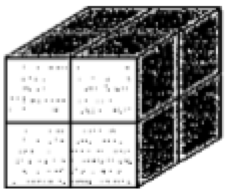
m = 2

d = 2

C) I finalment en tres dimensions:

Dividim un cub en vuit peces idèntiques com en la imatge. Veiem que la relació entre la mesura dels costats també és el doble. Així docs:

n = 8



m = 2

d = 3

Obtenim les conclusions següents:

| 1 DIMENSIÓ | 2 DIMENSIONS | 3 DIMESIONS |
|---|---|---|
| $4 = 4^1$ | $4 = 2^2$ | $8 = 2^3$ |
| $n = m^d$ | $n = m^d$ | $n = m^d$ |

D’aquesta manera, en tots els casos es compleix que el nombre de peces autosimilars és igual al factor d’ampliació elevat a la dimensió corresponent.

En tots aquests casos ja coneixíem la dimensió dels objectes geomètrics que estàvem treballant, però en el cas dels fractals no coneixem la dimensió. Si aconseguim aïllar la dimensió de la fórmula desenvolupant l’expressió, aconseguirem una fórmula que ens permeti conèixer la dimensió de qualsevol objecte – sempre hi quan es pugui dividir en parts idèntiques - a partir del nombre de peces autosimilars i del factor d’ampliació:

$n = m^d$

$\log n = \log m^d$

$\log n = d \cdot \log m$

**$d = \log n : \log m$**

Així doncs, la dimensió de Hausdorff és igual al logaritme del nombre de peces autosimilars entre el logaritme del factor d’ampliació.

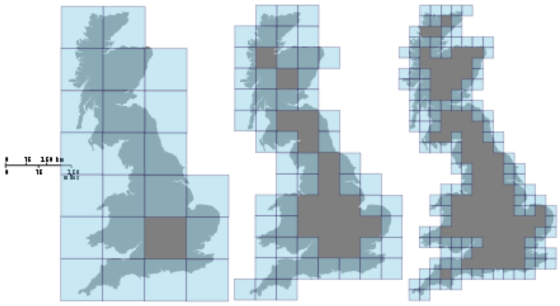
### 7.3. DIMENSIÓ MINKOWSKI

Però si hem de calcular la dimensió d’un fractal el qual no té autosimilitud exacta tenim un problema.

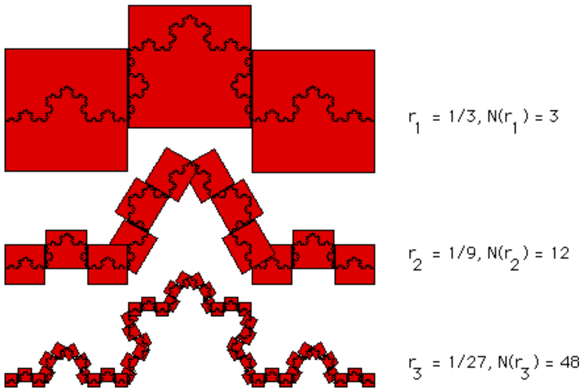
Per això, utilitzaríem la dimensió box-counting o de Minkowski. Amb aquest mètode es recobreix el fractal amb quadrats o caixes d’un costat determinat (anomenat ε). Aquest mètode només requereix calcular el nombre de caixes necessàries (N) per cobrir totalment l’objecte i aplicar la fórmula següent:

$$\dim_{\mathrm{box}}(S) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Aquest mèode és especialment útil, ja que es pot utilitzar per fractals amb autosimilitud perfecta, però a més permet calcular la dimensió de fractals que no són pefectes. A la pràctica és realment interessant ja que els fractals que trobem a la natura no són perfectes, com ja sabem. Un clar exemple de la utilitat d’aquesta dimensió és per mesurar costes, tal com va fer Mandelbrot amb la costa de la Gran Bretanya.



Imatge 14: Costa de Gran Bretanya




*Imatge 15: exemple de càlcul de la dimensió Minkowski*

## 8. LÍMITS I SUMATORIS

En el punt següent intentarem analitzar diferents fractals – els més comuns – però abans és necessària una mica de teoria sobre els límits (especialment els límits a l’infinit), ja que necessitarem fer diversos càlculs; i, com ja sabem, el procés d’iteració és infinit. Per tant, en aquest apartat explicarem, amb el llenguatge més senzill possible, les bases matemàtiques que necessitarem més endavant juntament amb la fórmula que acabem de deduir sobre la dimensió. És una part molt important, ja que obtindrem es fonaments que ens permetran analitzar els fractals a fons i veure les característiques principals.

És necessari, doncs, saber com es comportaran diferents successions – que haurem deduït prèviament analitzant el fractal - ja que, com sabem, l’algoritme que apliquem a la llavor per construir els fractals es repeteix infinitament. D’aquesta manera, obtindrem dades com la longitud del fractal. També aplicarem la fórmula que ens dóna la dimensió i mirarem de conèixer altres característiques del fractal, com l’àrea. Finalment, mirarem si les dades obtingudes concorden amb el sentit comú i el que esperàvem.

Quan una funció tendeix al $+\infty$:

- Si la funció és un polinomi, només caldrà fixar-nos amb el límit del terme dominant (el terme amb el grau més gran), i donarà $\pm\infty$.
- Si la funció està composta per fraccions algebraiques podem obtenir resultats ben diferents. Si el numerador és una constant i el denominador un polinomi de grau més gran que zero, la funció tendirà a 0.

  Si la funció està formada pel quocient de dos polinomis, ens trobarem davant d'una indeterminació $\pm\frac{\infty}{\infty}$. En aquest cas, haurem de veure quin és el grau del numerador i del denominador per saber si el límit tendeix a $\pm\infty$, 0 o bé un nombre real qualsevol.
- Però el cas principal que ens trobarem és el de límits de potències. Quan ens trobem davant d'aquesta situació, haurem de veure si la base ("k") és k > 1 o 0 < k < 1. En el primer cas la funció tendirà al $+\infty$. En el segon, a 0.

En algun cas, no podrem definir el fractal a partir d'una successió, sinó que ho haurem de fer a partir d'un sumatori d'infinits termes d'una progressió geomètrica.

Un sumatori és una operació matemàtica que s'utilitza per calcular la suma d'infinits sumands. El podem representar d'aquesta manera:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

En el sumatori de $x_i$, "i" agafa tots els valors des de 1 fins a n; ja que *i* és el límit inferior o el valor inicial, i *n* el valor final o límit superior. A més, en tots els casos s'ha de complir que *i* ≤ *n,* ja que sinó no estaríem sumant cap terme.

El sumatori que ens interessarà a nosaltres és el sumatori de sumes que contenen termes exponencials (on la variable estarà a l'exponent). Sabem que la fórmula és la següent:

$$\sum_{n=m}^{k} a^n = \frac{a^m - a^{k+1}}{1-a}$$

On *k* és el límit superior, és a dir, el nombre de termes que haurem de sumar – que sabem que serà igual al nombre d'iteracions que és infinit.

Per tant, ja d'entrada sabem que *k* = +∞.

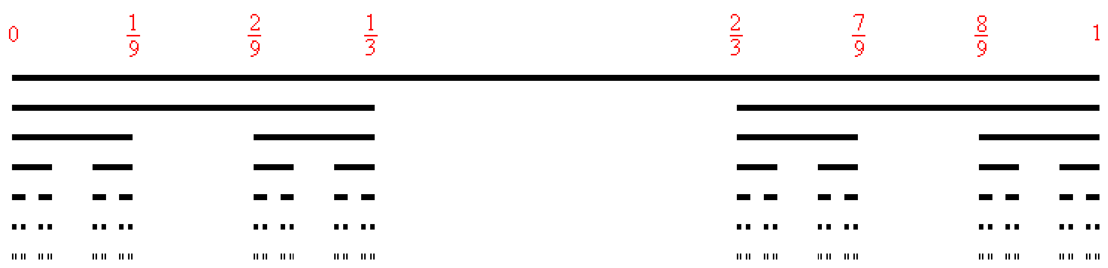
## 9. ANÀLISI DE DIFERENTS FRACTALS

En aquest apartat intentarem descriure alguns dels fractals d'autosimilitud exacta més coneguts. Ens basarem en el procés de generació per veure com es creen i veurem les seves característiques.

### 9.1. CONJUNT DE CANTOR

El conjunt de Cantor és un dels fractals més típics i coneguts. Rep el nom de Georg Cantor que al 1883 el va utilitzar com a eina d'investigació per a una de les seves principals preocupacions: el continu.

*Imatge 16: Conjunt de Cantor*




Llavor: la llavor del conjunt de Cantor és un segment [0, 1], com podem veure en la imatge.

Regla d'iteració: aquesta podria ser: "dividir el segment en tres d'iguals i eliminar el del mig".

A partir d'aquestes dades, si apliquem el procés d'iteració i la informació que hem adquirit en els apartats anteriors, serem capaços de calcular la longitud i la dimensió del fractal, i veurem quin és el destí de la òrbita molt intuïtivament.

Si anomenem $C_0$ el primer interval i el dividim en tres d'igual, obtenim els intervals {[0,1/3],[1/3,2/3],[2/3,1]}.

Per tant, en la primera iteració obtindrem el conjunt $C_1$ = [0,1/3] U [ 2/3,1]; ja que hem dividit el primer segment en tres parts i n'hem eliminat la del mig, per tant obtindrem aquest interval.

Si anem iterant de la mateixa manera, obtindrem els conjunts següents:

$C_2$ = [0,1/3] U [ 2/3,1]

$C_3$ = [0,1/9] U [ 2/9,3/9] U [6/9,7/9] U [8/9,1]

$C_4$ = [0,1/27] U [ 2/27,3/27] ….

## LONGITUD DEL FRACTAL

Com podem comprovar visualment en la imatge o mirant els intervals, a cada iteració obtenim intervals d'una distancia més petita. Ens podem imaginar, doncs, que el fractal resultant, és a dir, l'òrbita, serà un cúmul d'infinits punts. Per tant, la longitud del fractal serà nul·la, com podem comprovar a continuació:

| ITERACIÓ | NOMBRE DE SEGMENTS AUTOSIMILARS | LONGITUD DE CADA SEGMENT | LONGITUD TOTAL |
|---|---|---|---|
| $C_0$ (n=0) | 1 | 1 | 1 |
| $C_1$ (n=1) | 2 | 1/3 | 2 · 1/3 = 2/3 |
| $C_2$ (n=2) | 4 | 1/9 | 4 · 1/9 = 4/9 |
| $C_3$ (n=3) | 8 | 1/27 | 8 · 1/27 = 8/27 |
| Cn | $2^n$ | $1 / 3^n$ | $2^n \cdot 1/3^n = (2/3)^n$ |

La funció que determina la longitud total del fractal és $f(n) = (2/3)^n$, sent n el nombre d'iteracions.

Com acabem de dir, el procés iteratiu és infinit; per tant, n tendirà a l'infinit: longitud del conjunt de Cantor = $\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (Ja que com hem explicat en el punt anterior la base és inferior a 1).

Com podíem esperar, la longitud del conjunt de Cantor després d'infinites iteracions serà nul·la.

DIMENSIÓ DEL FRACTAL

Per saber la dimensió del fractal només cal que apliquem la fórmula que hem deduït anteriorment.

Sabem que el nombre de segments autosimilars que es produeixen a cada iteració és 2. La longitud dels segments es redueix en 1/3, per tant el factor d'ampliació és 3.

n = 2

m = 3

d = ?

d = log n : log m

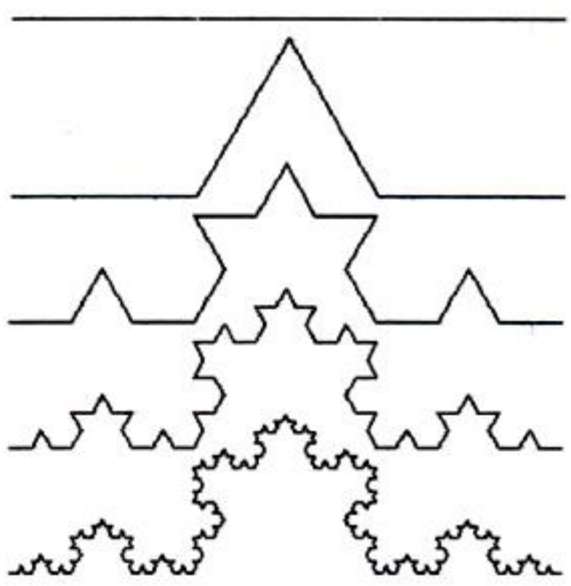
d = log2 : log 3 = 0,6309...

Veiem que la dimensió del Conjunt de Cantor es troba entre la dimensió 0 (un punt), i la dimensió 1 (una recta). Aquest resultat concorda, ja que el fractal tendeix a ser un conjunt d'infinits punts, i hauria de ser menor que la dimensió d'una recta.

## 9.2. CORBA DE KOCH

La corba de Koch va ser una de les primeres corbes fractals en ser descrites. Va aparèixer al 1.904 en un article del matemàtic suec Helge Von Koch. Una de les característiques d'aquesta corba és que no es pot traçar cap recta tangent en cap punt.

*Imatge 17: Corba de Koch*



Llavor: com en el conjunt de Cantor, la llavor és un segment d'una recta. Podem considerar, també, que la longitud d'aquest segment és 1.

Regla d'iteració: "dividir cada segment en tres d'iguals i substituir el central per dos altres segments de la mateixa longitud, de manera que aquests formen un angle de 60º, i formarien un triangle equilàter si no haguéssim eliminat el segment central”.

En aquest cas, anomenarem cada iteració amb la lletra “K” i el subíndex corresponent.

En la imatge podem veure com la longitud del fractal va augmentant a mesura que iterem; ja que encara que els segments són més petits, cada cop n’hi ha més. També observem que l’estructura del fractal va fent-se més complexa, per tant, suposem que la dimensió del fractal serà lleugerament superior a la d’una recta.

LONGITUD DEL FRACTAL

En aquest cas, el nombre de segments augmenta a una escala major que en el conjunt de Cantor; mentre que la longitud de cada segment es redueix de la mateixa manera.

| ITERACIÓ | NOMBRE DE SEGMENTS AUTOSIMILARS | LONGITUD DE CADA SEGMENT | LONGITUD TOTAL |
|---|---|---|---|
| $K_0$ (n=0) | 1 | 1 | 1 |
| $K_1$ (n=1) | 4 | 1/3 | 4 · 1/3 = 4/3 |
| $K_2$ (n=2) | 16 | 1/9 | 16 · 1/9 = 16/9 |
| $K_3$ (n=3) | 64 | 1/27 | 64 · 1/27 = 64/27 |
| $K_n$ | $4^n$ | $1 / 3^n$ | $4^n \cdot 1/3^n = (4/3)^n$ |

La funció que determina la longitud total del fractal és la successió $(4/3)^n$.

Si determinem el límit en l’infinit obtenim que:

longitud de la corba de Koch= $\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \lim_{n\to +\infty} \left(\frac{4^n}{3^n}\right) = +\infty$

Per tant, la longitud d’aquest fractal és infinita. Podem descriure’l com una corba formada per infinits segments inapreciables la suma dels quals és infinita.

DIMENSIÓ DEL FRACTAL

Tornem a aplicar la fórmula anterior.

Sabem que el nombre de segments autosimilars que es produeixen a cada iteració és 4; i la longitud dels segments es redueix en 1/3, per tant el factor d’ampliació continuarà sent 3.

$n = 4$

$m = 3$

$d = ?$

$d = \log n : \log m$

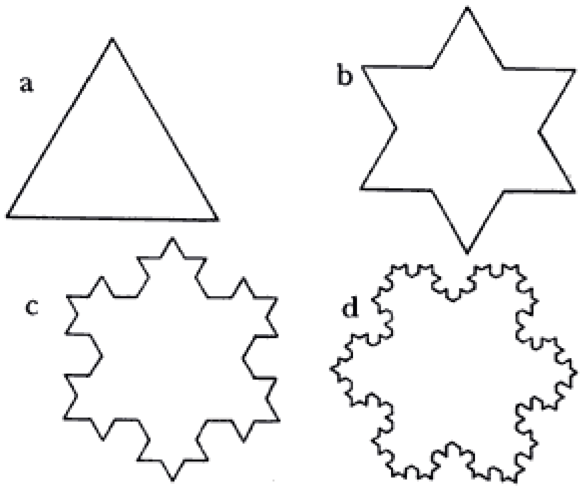
$d = \log 4 : \log 3 = 1{,}2618...$

Com hem previst, la dimensió del fractal és superior a 1, ja que és una recta infinita i amb molt més complexitat.

## 9.3. FLOC DE NEU DE KOCH

El floc de neu o estrella de Koch és un fractal que manté una estreta relació amb l’anterior. Va ser descrit pel mateix matemàtic, i el procés d’iteració és idèntic, amb l’excepció de que aquest parteix d’un triangle equilàter en comptes d’un segment.

*Imatge 18: Floc de neu de Koch*




Llavor: la llavor, com acabem de dir, és un triangle equilàter, cada costat del qual mesura una unitat.

Regla d'iteració: podem mantenir el mateix algoritme que en la corba de Koch; és a dir: "dividir cada segment en tres d'iguals i substituir el central per dos altres segments de la mateixa longitud, de manera que aquests formen un angle de 60º, i formarien un triangle equilàter si no haguéssim eliminat el segment central". Amb la diferència, clar, que en aquest cas partim de tres segments inicials i haurem d'aplicar l'algoritme a cadascun.

En aquest cas podem realitzar el càlcul del perímetre i la dimensió del fractal, però, a més, intentarem calcular l'àrea del mateix. Com veurem, aquest fractal està íntimament relacionat amb l'anterior.

LONGITUD DEL FRACTAL

Si considerem l'experiència d'haver calcular el fractal anterior, ens podrem imaginar que el perímetre del floc de neu serà infinit, de la mateixa manera que ho era la corba.

| ITERACIÓ | NOMBRE DE SEGMENTS AUTOSIMILARS | LONGITUD DE CADA SEGMENT | LONGITUD TOTAL |
|---|---|---|---|
| $K_0$ (n=0) | 3 | 1 | 3 |
| $K_1$ (n=1) | 12 | 1/3 | 12 · 1/3 = 12/3 |
| $K_2$ (n=2) | 48 | 1/9 | 48 · 1/9 = 48/9 |
| $K_3$ (n=3) | 192 | 1/27 | 192 · 1/27 = 192/27 |
| Kn | $3 \cdot 4^n$ | $1 / 3^n$ | $3 \cdot 4^n \cdot 1/3^n =$ $3 \cdot (4/3)^n$ |

En la taula podem observar que la longitud de cada segment és la mateixa que en la corba de Koch, mentre que el nombre de segments és el triple; per tant, aquest fractal el podríem descriure com tres corbes de Koch juntes i tancades.

La funció que determina la longitud total del fractal és f (n) = $3 \cdot (4/3)^n$, sent n el nombre d'iteracions. Per tant, la longitud serà:

longitud del floc de neu de Koch = $\lim_{n\to +\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \lim_{n\to +\infty} 3 \cdot \left(\frac{4^n}{3^n}\right) = +\infty$

ÀREA DEL FRACTAL

Sabem que l'àrea d'un triangle és el resultat de multiplicar la base per l'altura per ½. A partir de la imatge que tenim a sobre, anirem completant la taula següent. Veiem que a cada iteració els triangles tenen un color diferent, cosa que ens ajudarà. Com que considerem que la longitud d'un costat del primer triangle és 1; la seva àrea serà $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (L'altura la podem calcular fàcilment mitjançant Pitàgores). També sabem que la base i l'altura de cada triangle seran 1/3 respecte a la del triangle de la iteració anterior.

Finalment, sabem que l'àrea total serà la suma de les àrees de tots els triangles fins a la n corresponent.

| | Nombre de triangles nous | base dels triangles nous | altura dels triangles nous | Àrea dels triangles nous (AK) | Àrea total |
|---|---|---|---|---|---|
| $K_0$ (n=0) | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ |
| $K_1$ (n=1) | 3 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{6}$ | $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 3$ | $AK_0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 3$ |
| $K_2$ (n=2) | 12 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{\sqrt{3}}{18}$ | $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{18}\cdot 12$ | $AK_0 + AK_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{18}\cdot 12$ |
| $K_3$ (n=3) | 48 | $\frac{1}{27}$ | $\frac{\sqrt{3}}{54}$ | $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{\sqrt{3}}{54}\cdot 48$ | $AK_0 + AK_1 + AK_3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{\sqrt{3}}{54}\cdot 48$ |
| Kn | $4^{n-1}\cdot 3$ | $\frac{1}{3^n}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\ 3^n}$ | $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3^n}\cdot 4^{n-1}\cdot$ 3 = $\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot 4^n\cdot 4^{-1}}{4\cdot 9^n}=$ $\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot}{16}\cdot(\frac{4}{9})^n$ | $AK_0 + \sum_{n=1}^{n}\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot}{16}\cdot(\frac{4}{9})^n$ |

Per tant, l'àrea del floc de neu ve determinada per la següent expressió:

$AK_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot}{16}\cdot(\frac{4}{9})^n$

Sabem que:

$AK_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\sum_{n=m}^{k} a^n = \frac{a^m - a^{k+1}}{1-a}$ En que k= +∞, m=1 i a = $\frac{4}{9}$

En aquest cas haurem d'afegir una altra expressió al sumatori, ja que el $(\frac{4}{9})^n$ està multiplicant a un altre terme, el qual anomenarem *b* (*b*=$\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot}{16}$)

Així doncs, la fórmula que ens permetrà conèixer l'àrea del floc de neu serà la següent:

$$\sum_{n=m}^{k} a^n \cdot b = b \cdot (\frac{a^m - a^{k+1}}{1-a})$$

Substituïm l'expressió i:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot (\frac{4}{9})^n = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot (\frac{(\frac{4}{9})^1 - (\frac{4}{9})^{\infty+1}}{1-(\frac{4}{9})})$$

Per tant:

$$AK_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot\sqrt{3}}{16} \cdot (\frac{4}{9})^n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\cdot\sqrt{3}}{16} \cdot (\frac{(\frac{4}{9})^1 - (\frac{4}{9})^{+\infty+1}}{1-(\frac{4}{9})}) =$$

(Sabem que $(\frac{4}{9})^{+\infty+1} \rightarrow 0$ ja que el denominador és d'ordre superior)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\cdot\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^1 - 0}{1-\left(\frac{4}{9}\right)}\right) = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{5} = 0{,}692820323..$$

És a dir, l'àrea del floc de neu de Koch és aproximadament 0,6928 si considerem que els costats del triangle inicial valien una unitat.

Per tant, una àrea que no arriba a 0,7 unitats esta delimitada per un perímetre infinit.

DIMENSIÓ DEL FRACTAL

Sabem que el nombre de segments autosimilars que es produeixen a cada iteració – a partir de cada un dels segments inicials - és 4. El factor d'ampliació és 3. Aquest fractal tindrà, per tant, la mateixa dimensió que la corba, ja que el nombre de fragments i el factor d'ampliació és el mateix.

n = 4

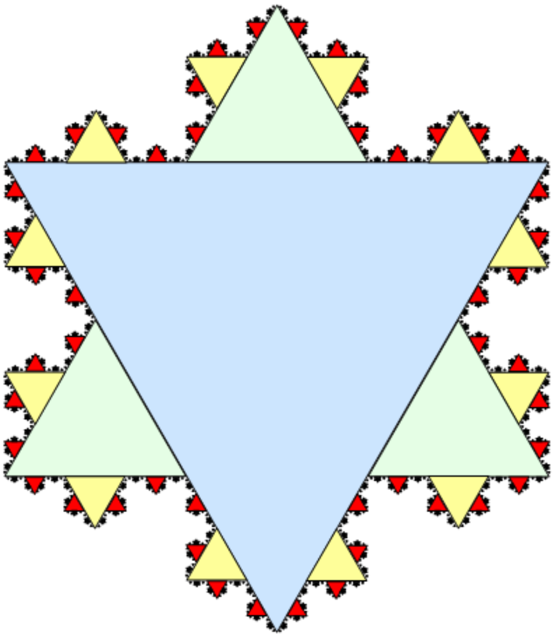
m = 3

d = ?

d = log n : log m

d = log 4 : log 3 = 1,2618...

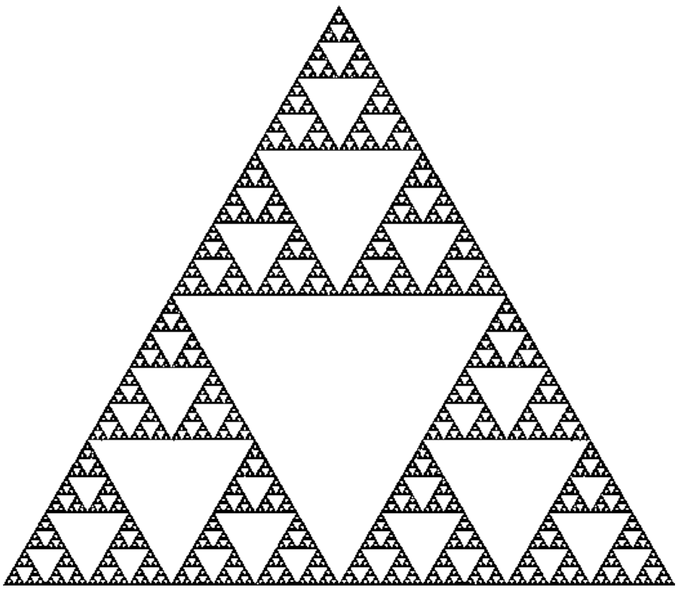
*Imatge 19: Floc de neu de Koch*



## 9.4. TRIANGLE DE SIERPINSKI

El triangle de Sierpiński és un objecte fractal, que va ser introduït per primera vegada al 1915 pel matemàtic polonès que li dóna nom. És un dels fractals més coneguts, i, a més, també existeixen el tetraedre i la catifa de Sierpinski, que segueixen un algoritme similar.

*Imatge 20: Triangle de Sierpinski*



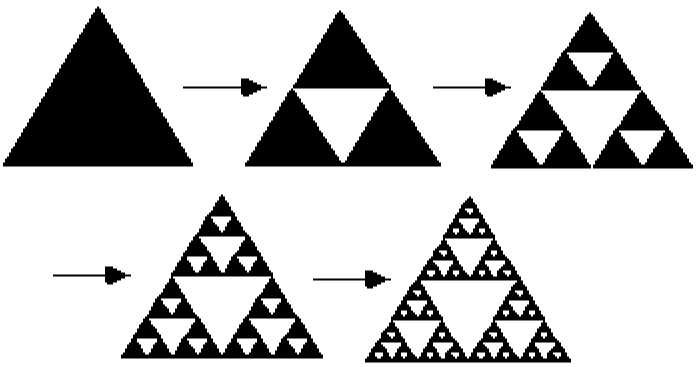
Llavor: igual que en el floc de neu de Koch, la llavor és un triangle equilàter, cada costat considerem que mesura una unitat.

Regla d'iteració: "Eliminar la figura central fruit de la unió dels punts mitjans dels costats de cada triangle per tal de que en romanguin tres congruents."

LONGITUD DEL FRACTAL

En aquest cas, calcular la longitud del perímetre del fractal no té sentit, ja que és manté constant (el perímetre sempre és la longitud dels costats del triangle inicial). El que si podem calcular és la longitud de tots els triangles en conjunt.

| ITERACIÓ | NOMBRE DE TRIANGLES X COSTATS (3) | LONGITUD DE CADA COSTAT | LONGITUD TOTAL |
|---|---|---|---|
| $S_0$ (n=0) | 1·3 | 1 | 3 |
| $S_1$ (n=1) | 3·3 | 1/2 | $3·3·\frac{1}{2}$ |
| $S_2$ (n=2) | 9·3 | 1/4 | $9·3·\frac{1}{4}$ |
| $S_3$ (n=3) | 27·3 | 1/8 | $27·3·\frac{1}{8}$ |
| Sn | $3^n·3$ | $1/2^n$ | $3·3^n·1/2^n =$<br>$3·(3/2)^n$ |



La longitud total del fractal ve marcada per la successió 3 · $(3/2)^n$, que tendeix a:

longitud del triangle de Sierpinski = $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \xrightarrow[n=+\infty]{} = +\infty$

Així doncs, dintre d'un espai i d'un perímetre limitats, podem trobar un conjunt de corbes de longitud infinita.

ÀREA DEL FRACTAL

Com veiem l'àrea del total (de color negre), es redueix en ¼ a cada iteració. Sabem que l'àrea d'un triangle és ½ per la base per l'altura. També sabem que l'altura de cada triangle es redueix a la meitat; i podem calcular l'altura del triangle inicial mitjançant la trigonometria.

| | Nombre de triangles | base dels triangles | altura dels triangles | Àrea de cada triangle | Àrea total |
|---|---|---|---|---|---|
| $K_0$ (n=0) | 1 | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ |
| $K_1$ (n=1) | 3 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ | $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ |
| $K_2$ (n=2) | 9 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{8}$ | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}$ | $9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}$ |
| $K_3$ (n=3) | 27 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{\sqrt{3}}{16}$ | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16}$ | $27 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16}$ |
| Kn | $3^n$ | $\frac{1}{2^n}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$ | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{2 \cdot n+2}}$ | $3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{2 \cdot n+2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3^n}{(2^2)^n + 2^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\frac{3}{4})^n$ |

Llavors, l'àrea del triangle de Sierpinski = $\lim_{n\to +\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

DIMENSIÓ DEL FRACTAL

Sabem que el nombre de triangles autosimilars que es produeixen a cada iteració és 3. El factor d'ampliació és 2, ja que cada triangle té els costats la meitat de llargs que el del triangle anterior.

n = 3

m = 2

d = ?

d = log n : log m

d = log 3 : log 2 = 1,5849...

Per tant, la dimensió del triangle queda entremig de la d'una recta i la d'una superfície; ja que, com veurem a continuació, el triangle de Sierpinski no té una superfície clara.

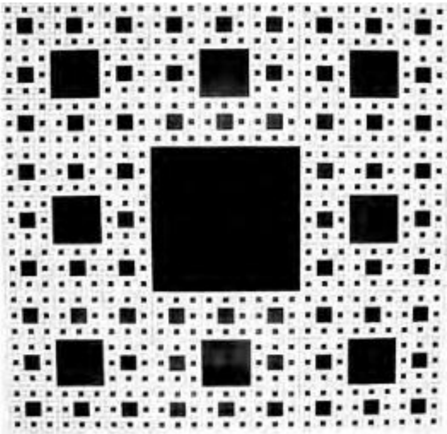
Per tant, aquest fractal mostra que no només en una àrea finita pot haver-hi una longitud infinita, sinó que a més, aquesta longitud infinita pot estar dins d'una àrea nul·la.

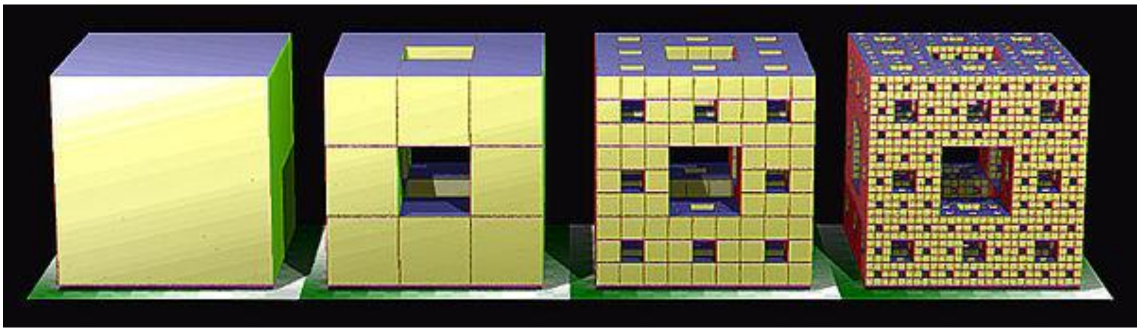
### 9.5. ESPONJA DE MENGER

L'esponja o cub de Menger va ser descrit pel matemàtic Karl Menger al 1926 mentre explorava el concepte de dimensió topològica.

Aquest fractal també té una relació amb Sierpinski, ja que és com la catifa de Sierpinski en "3 dimensions" (topològiques).

*Imatge 21-22: Catifa de Sierpinski i Esponja de Menger*





Llavor: com veiem en la imatge, la llavor és un cub.

Regla d'iteració: " Dividim cada cara del cub en 9 quadrats, de tal manera que quedin 27 cubs. Eliminem els cubs centrals de cada cara i el cub del centre. D'aquesta manera, en la segona imatge queden 20 cubs dels 27 inicials."

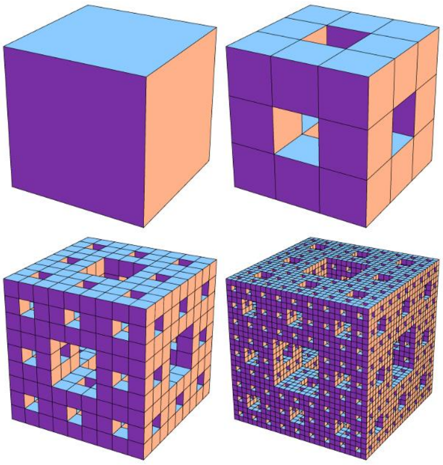
En aquest cas, podem calcular l'àrea i el volum del fractal:

ÀREA DEL FRACTAL

Per calcular l'àrea del fractal ens hem de fixar en l'àrea exterior, però també en l'interior. Sabem que l'àrea d'un quadrat és la longitud d'un costat al quadrat; com sempre, considerarem que la longitud del primer cub és la unitat. També sabem que cada cub té 6 cares. Com veiem, la longitud dels costats del cub es redueix en 1/3 a cada iteració; i cada cara exterior passa a tenir 8 vegades més cubs que l'anterior.

Per calcular l'àrea interior ens hem de fixar en les cares interiors que hi ha a cada costat del cub i multiplicar-les per les 6 cares. Per exemple, en la segona imatge observem que cada cara conté 4 cares interiors.

Per calcular l'àrea interior de la tercera iteració, ho podem fer a partir de l'autosimilitud. En la tercera imatge podem comptar 20 quadrats totalment idèntics a la segona imatge. Per tant, l'àrea interior serà 20 cops la de l'àrea anterior sent els costat 3 cops més petits; a més, li hem de sumar l'àrea de la iteració anterior menys 4 quadrats que s'eliminen (els 4 cubs del centre). Tot i així, no serà tant fàcil.



*Imatge 23: Esponja de Menger*

| ITERACIÓ | NOMBRE DE QUADATS EXTERIORS | NOMBRE DE QUADRATS INTERIORS (X) | SUPERFÍCIE DE CADA QUADRAT | ÀREA TOTAL (NOMBRE DE CUBS x LONGITUD$^2$) |
|---|---|---|---|---|
| $M_0$ (n=0) | 6 | 0 | $(1)^2$ | 6·1 |
| $M_1$ (n=1) | 8·6 | 4·6 | $(\frac{1}{3})^2$ | (8·6+4·6)· $(\frac{1}{3})^2$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $M_2$ (n=2) | 64·6 | $(X_1 \cdot 9 - X_1) + 20 \cdot 4 \cdot 6$ | $(\frac{1}{9})^2$ | $[64 \cdot 6 + (X_1 \cdot 9 - X_1) + 20 \cdot 4 \cdot 6] \cdot (\frac{1}{9})^2$ |
| $M_3$ (n=3) | 512·6 | $(X_2 \cdot 8) + 400 \cdot 4 \cdot 6$ | $(\frac{1}{27})^2$ | $[512 \cdot 6 + (X_2 \cdot 9 - X_2) + 400 \cdot 4 \cdot 6] \cdot (\frac{1}{27})^2$ |
| Mn | $8^n \cdot 6$ | $20^{n-1} \cdot 4 \cdot 6 + (X_{n-1} \cdot 8)$ | $(\frac{1}{3^n})^2$ | $[8^n \cdot 6 + (X_{n-1} \cdot 8) + 20^{n-1} \cdot 4 \cdot 6] \cdot (\frac{1}{3^n})^2$ |

Trobar la successió que permet calcular l'àrea del fractal no ha estat gaire fàcil. Per trobar-la hem de fer un petit exercici d'abstracció. En primer lloc, queda clar que el nombre de quadrats exteriors augmenta per 8 i que la longitud dels costats d'un quadrat es redueix 3 vegades.

Però per saber el nombre de quadrats interiors la cosa es complica. A la primera iteració veiem com a cada cara del cub queden 4 quadrats interiors, per tant, hi haurà 4·6 quadrats interiors. A la segona iteració, observem que hi ha 20 cops el cub de la primera iteració; per tant, hi haurà 20 quadrats interiors més. A més, però, en el lloc que abans hi havia un quadrat interior ara es troba dividit en 9 quadrats, un dels quals s'elimina. Per tant, hi haurà 20 cops més quadrats, més el nombre de quadrats interiors anteriors multiplicat per 8 que en la iteració anterior.

Finalment, hem de trobar la fórmula que ens doni el nombre de quadrats interiors:

| | | |
|---|---|---|
| $M_0$ (n=0) | 0 | |
| $M_1$ (n=1) | 4·6 | |
| $M_2$ (n=2) | 4·6·8+20·4·6 = | 4·6 ·(8+20) |
| $M_3$ (n=3) | $4·6·8+20·4·6+20^2·4·6$ = | $4·6 \cdot (8+ 20+20^2)$ |
| $M_n$ | | $4·6 \cdot (8+ \sum_{n=2}^{\infty} 20^{n-2})$ |

$$x_{\,(n\to+\infty)} = 4 \cdot 6 \cdot (8 + \sum_{n=2}^{\infty} 20^{n-2})$$

Com ja podem veure, l'expressió tendeix a l'infinit:

$$\sum_{n=m}^{k} a^n = \frac{a^m - a^{k+1}}{1-a}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 20^{n-2} = \frac{20^2 - 20^{\infty+1}}{1-20}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 20^{n-2} = \frac{20^2 - 20^{\infty+1}}{1-20} = \frac{20^{\infty} - 20^2}{20-1} = +\infty$$

Per tant:

$$X \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4 \cdot 6 \cdot (8 + \infty) = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} [8^n·6+(X_{n-1}·8)+20^{n-1}·4·6] \cdot (\tfrac{1}{3^n})^2 = \lim_{n\to+\infty} [8^n·6+(+\infty·8)+20^{n-1}·4·6] \cdot (\tfrac{1}{3^n})^2$$

$$\lim_{n\to+\infty} [8^n·6+(\infty·8)+20^{n-1}·4·6] \cdot (\tfrac{1}{3^{2\cdot n}}) = \lim_{n\to+\infty} [8^n·6+\infty+20^n·4·6] \cdot (\tfrac{1}{3^{2\cdot n}}) =$$

$= \lim_{n\to +\infty} [8^n+(\frac{20}{9})^n]= +\infty.$

Per tant, la superfície de l'esponja de Menger és infinita.

VOLUM DEL FRACTAL

El volum del fractal es pot calcular fàcilment.

| ITERACIÓ | NOMBRE DE CUBS | VOLUM DE CADA CUB | VOLUM TOTAL |
|---|---|---|---|
| $M_0$ (n=0) | 1 | 0 | $1$ |
| $M_1$ (n=1) | 20 | $(\frac{1}{3})^3$ | $20 \cdot (\frac{1}{3})^3$ |
| $M_2$ (n=2) | 400 | $(\frac{1}{9})^3$ | $400 \cdot (\frac{1}{9})^3$ |
| $M_3$ (n=3) | 8.000 | $(\frac{1}{27})^3$ | $8000 \cdot (\frac{1}{27})^3$ |
| Mn | $20^n$ | $(\frac{1}{3^n})^3$ | $20^n \cdot (\frac{1}{3^n})^3 = (\frac{20}{27})^n$ |

Per tant, si portem la successió al límit, obtindrem que el volum del fractal és:

$M_n \xrightarrow[n=+\infty]{} (\frac{20}{27})^n = 0$

Curiosament, el volum de l'esponja de Menger és nul. És a dir, en un volum nul trobem una superfície infinita; una altra de les rareses dels fractals que no deixa'n de sorprendre'ns.

DIMENSIÓ DEL FRACTAL

Hem vist que del cub inicial n'obtenim 20: 3·3·3 menys un cub de cada de les sis cares i el cub central; per tant el nombre de peces autosimilars és 6.. El factor d'ampliació és 3, com també hem vist:

n = 20

m = 3

d = ?

d = log n : log m

d = log 20 : log 3 = 2,7268...

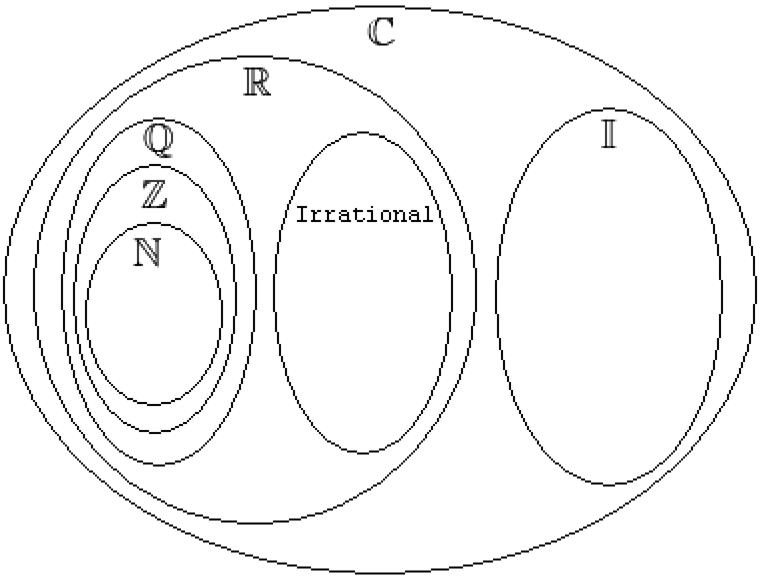
La dimensió de l'esponja és propera a la d'un cos amb volum encara que no en tingui, però la seva dimensió havia de ser superior a la d'una superfície ja que té una superfície infinita.

## 10. CONJUNT DE MANDELBROT

Fins ara hem estat parlant de fractals lineals, en els que aplicàvem un algoritme simple. Però també resultaria interessant anar una mica més enllà i parlar de fractals en el pla complex. Tot i que n'hi ha diversos (Conjunt de Julia, fractal del mètode de Newton,...) ens centrarem en analitzar el Conjunt de Mandelbrot.

### 10.1. NOMBRES COMPLEXOS

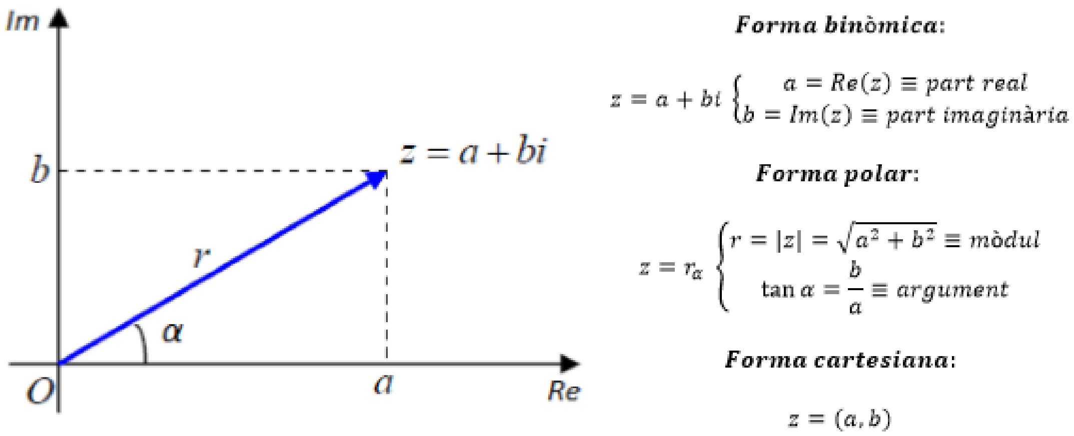
Començarem per conèixer els nombres complexos i el pla complex:




*Imatge 24: classificació dels nombres*

Com veiem, els nombres complexos agrupen a tot el conjunt de nombres, entre els quals trobem dos grans grups: els reals i els imaginaris. Podem expressar els nombres complexos de la forma següent: *z*(nombre complex ℂ) “= *a* + *bi”* (on *a* és un nombre real; *bi* és un nombre imaginari, en que *b* és un nombre real i *i* = $\sqrt{-1}$).

Representem els nombres reals en un pla, anomenat pla complex. En l’eix d’abscisses indicarem la component real (a), mentre que en l’eix d’ordenades la imaginària (b). D’aquesta manera, el nombre quedarà representat en forma de vector, pel qual tenim les següents maneres de representar-lo:




## 10.2. PROPIETATS I CONSTRUCCIÓ DEL CONJUNT DE MANDELBROT

Aquest fractal va ser concebut pel matemàtic que va posar nom als fractals al 1975. Les principals característiques d’aquest són:

- El conjunt de Mandelbrot és un conjunt connex: el conjunt està format per una única peça.
- És compacte (tancat i acotat).
- La frontera del conjunt (és un fractal) té dimensió topològica 1, però dimensió de Hausdorff 2 (és a dir, la línia que delimita el conjunt té dos dimensions; de la mateixa manera que la corba de Koch en té 1,2...), cosa que implica una complexitat grandiosa ja que és una línia i té la

dimensió d'un pla; de fet, té la màxima dimensió possible que pot tenir un objecte de dimensió topològica 1.

- Està catalogat com un dels objectes matemàtics més complexos creats per l'home. Fins i tot es diu que no s'ha inventat, sinó que s'ha descobert.
- El conjunt adquireix una bellesa especial al endinsar-nos en el seu interior.
- Presenta quasi-autosimilitud.

El conjunt de Mandelbrot, també conegut com a conjunt M, ve definit per la següent successió recurrent (procés d'iteració infinit):

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

*C* i *z* són nombres complexos.

"*C*" és un nombre fix complex qualsevol que compleix la condició de que el conjunt queda acotat (connex). Podem comprovar que el conjunt queda acotat si la successió no tendeix a l'infinit (és a dir; $|z^2+c|$ no tendeix a infinit). Això es compleix si $|z^2+c| < 2$.

Per exemple, si "c" = 1:

$Z_0 = 0$

$Z_1 = 0+1 = 1$

$Z_2 = 1^2 + 1 = 2$

$Z_3 = 2^2 + 1 = 5$

$Z_4 = 5^2 + 1 = 26$

$Z_5 = 26^2 + 1 = 677$

....

Veiem, doncs, que si c=1 la successió tendeix a infinit, i per tant el conjunt no quedaria acotat.

Ara bé, si agafem, per exemple, el valor de c=-1:

$Z_0 = 0$

$Z_1 = 0 - 1 = -1$

$Z_2 = (-1)^2 + (-1) = 0$

$Z_3 = 0 - 1 = -1$

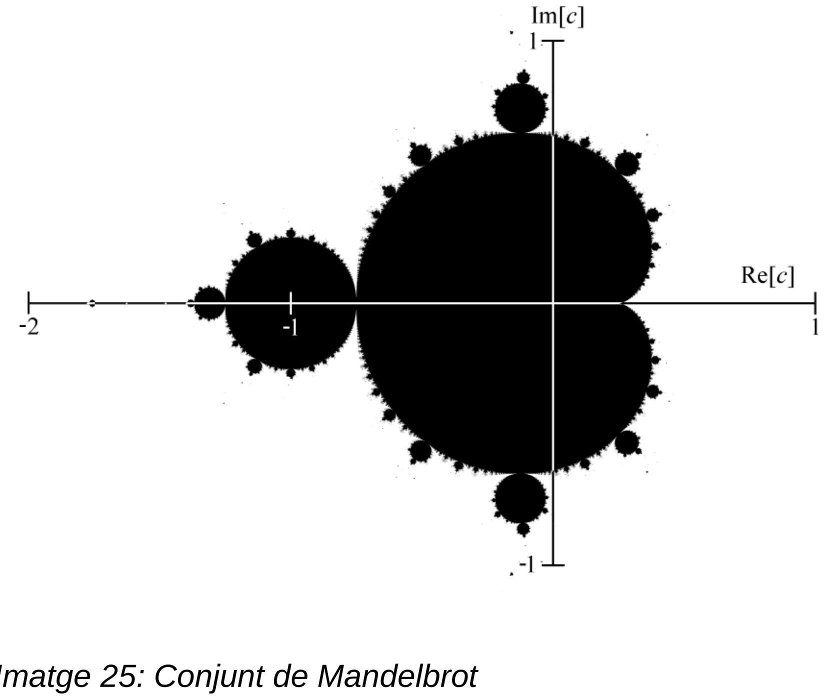
$Z_4 = (-1)^2 + (-1) = 0$

$Z_5 = 0 - 1 = -1$

....

En aquest cas, en canvi, la successió no tendeix a infinit; per tant -1 queda inclòs en el conjunt de Mandelbrot.

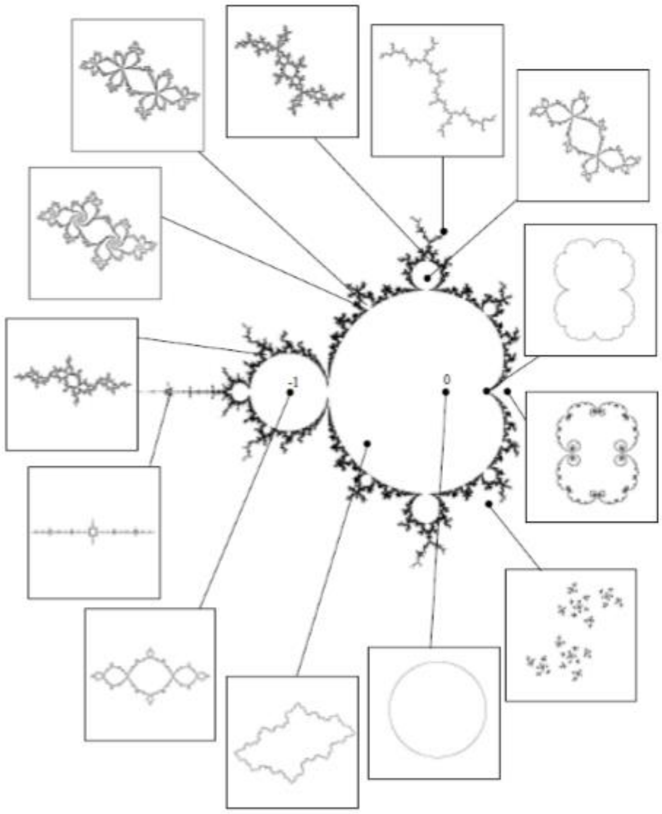
Així doncs, el Conjunt de Mandelbrot és la representació al pla complex de tots els valors que pot adquirir "c" de manera que el conjunt quedi acotat:




*Imatge 25: Conjunt de Mandelbrot*

En aquest pla podem veure quins són els nombre complexos que formen el conjunt de Mandelbrot. Com hem dit, el -1 (que tindria com a component real (a) -1, i com a component en l'eix imaginari (b) 0) queda dins del conjunt.

En aquesta imatge podem veure diferents conjunts que corresponen a un valor determinar de "c" dins del conjunt M. Aquests conjunts formen diversos conjunts de Julia amb diverses formes: com més centrats, adquireixen una forma més arrodonida, mentre que quan ens allunyem, els conjunts tenen una forma dendrítica i més distorsionada.

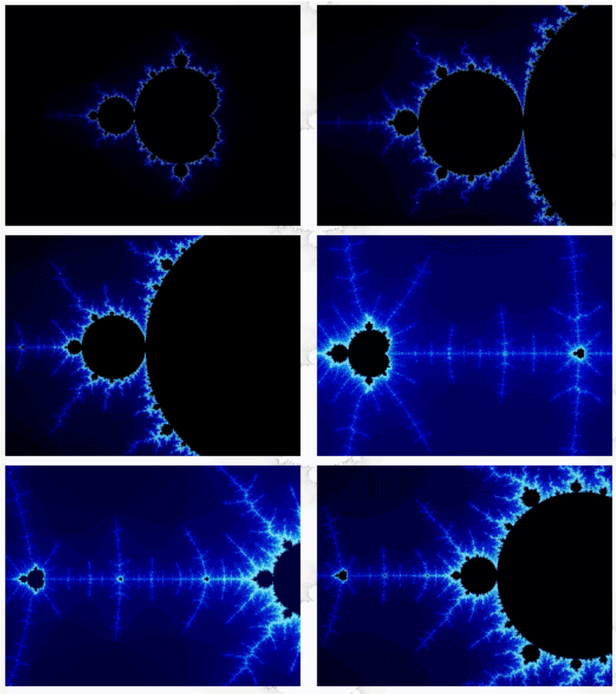



*Imatge 26: Conjunt de Mandelbrot ampliat*

Si agaféssim un valor de c fora del conjunt de Mandelbrot, obtindríem un conjunt no connex (separat en dues o més peces).

Finalment, també és interessant veure la quasi-autosimilitud que presenta el conjunt M.

Podem observar diverses "còpies" de la figura cardioïdal que apareixen en diferents direccions al augmentar la imatge. Com que no presenta autosimilitud perfecta, la semblança d'aquestes dependrà de la zona i del grau de magnificació al qual estiguem.

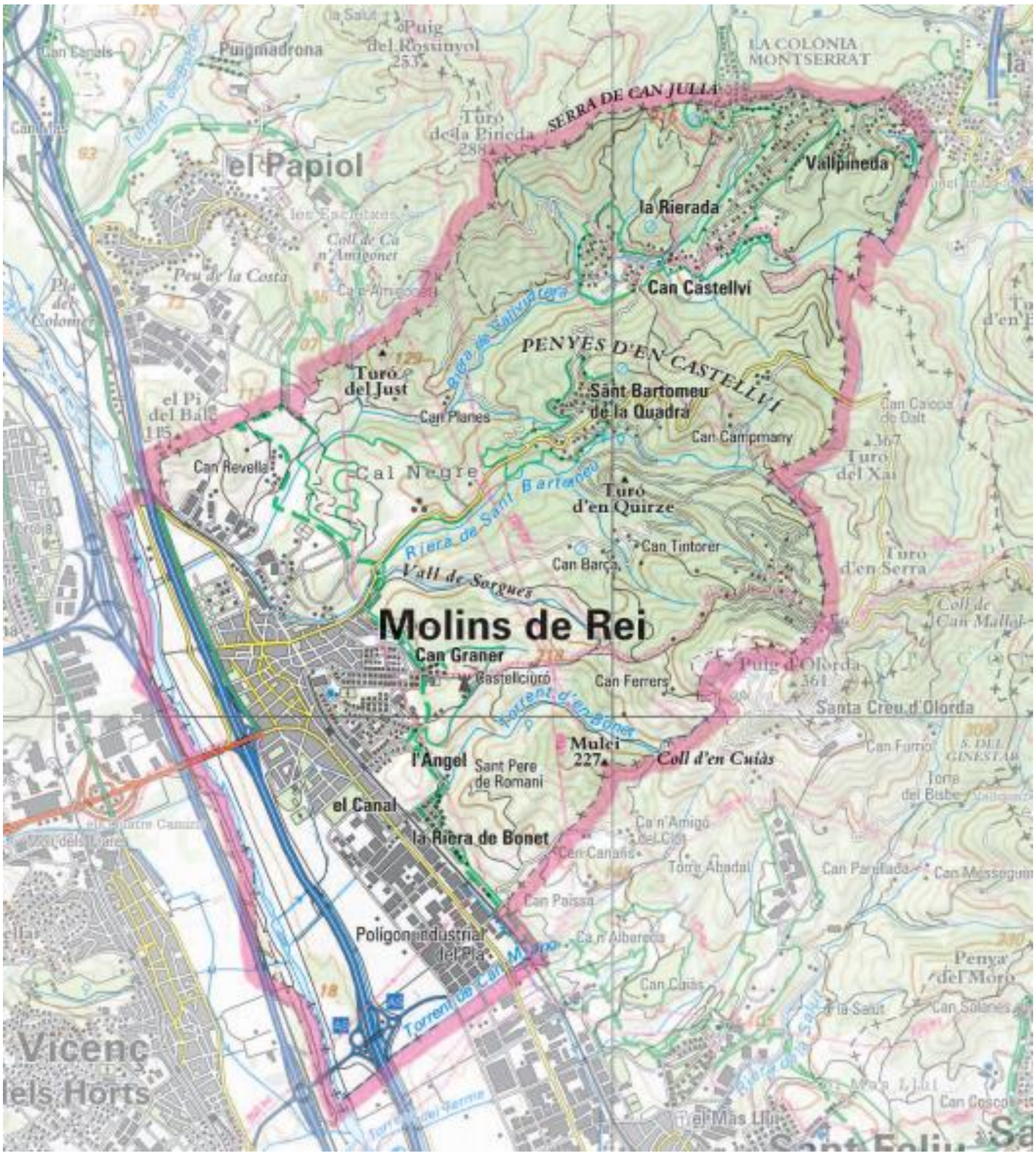


*Imatge 27: Conjunt de Mandelbrot*

**PART PRÀCTICA: IDENTIFICACIÓ DE FRACTALS A MOLINS DE REI**

La part pràctica del treball consistirà a cercar i analitzar fractals que apareguin a la vil·la de Molins de Rei. D'aquesta manera es veurà la importància i la presència dels fractals, per demostrar la seva utilitat especialment a l'hora d'estudiar la geografia i estructures naturals.

## 1. GEOGRAFIA DE MOLINS DE REI

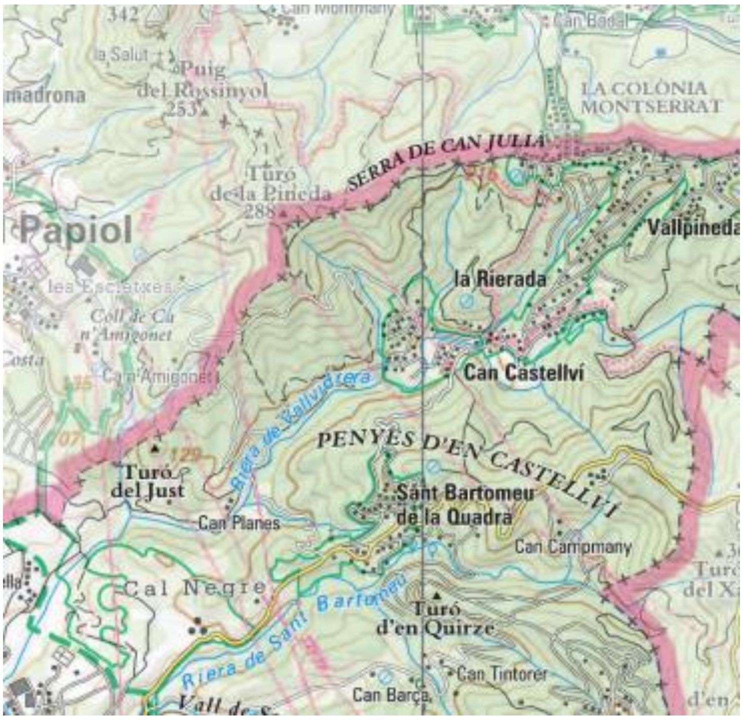


*Imatge 28: Mapa de Molins de Rei de l'institut Cartogràfic de Catalunya*

Primerament, mitjançant aquets mapa físic de Molins de Rei veurem si es pot identificar algun fractal.

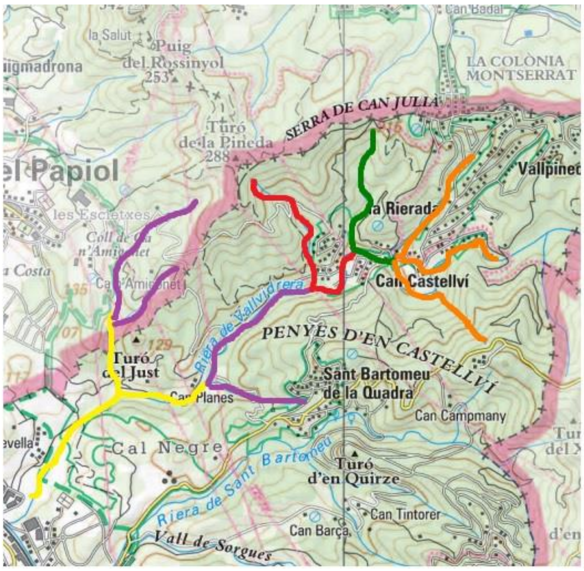
### 1.1. RIUS I CAMINS

En aquesta imatge es pot observar la part nord-oest de la vil·la.




*Imatge 29: mapa de Molins de Rei – riera de Vallvidrera*

En la riera de Vallvidrera, per exemple, es pot observar un comportament fractal. A cada iteració la riera es bifurca en forma de "ve baixa". Es poden veure fins un mínim de cinc iteracions clarament, marcades amb un color diferent al mapa. Aquest fet es pot explicar per la naturalesa dels rius: el conjunt d'afluents formen aquesta estructura, que acabarà desembocant al riu Llobregat:




*Imatge 30: mapa de Molins de Rei marcat*

Una cosa similar passa si ens fixem en alguns dels camins de la vil·la:


*Imatge 31: mapa de Molins de Rei*


*Imatge 32: mapa de Molins de Rei marcat*

En aquest segon cas la xarxa de camins d'aquesta zona segueix un algoritme semblant: "bifurcar-se en dos altres camins".

En ambdós casos, els fractals segueixen una semblança de quasi-autosimilitud, ja que cada iteració és única. A més, aquests dos casos demostren que podem trobar estructures fractals tan en el comportament d'accidents naturals com en el d'estructures creades per l'home. Finalment, la complexitat i semblança que comparteixen aquestes estructures fan que la geografia d'aquesta zona tingui una certa bellesa.

### 1.2. FRONTERA

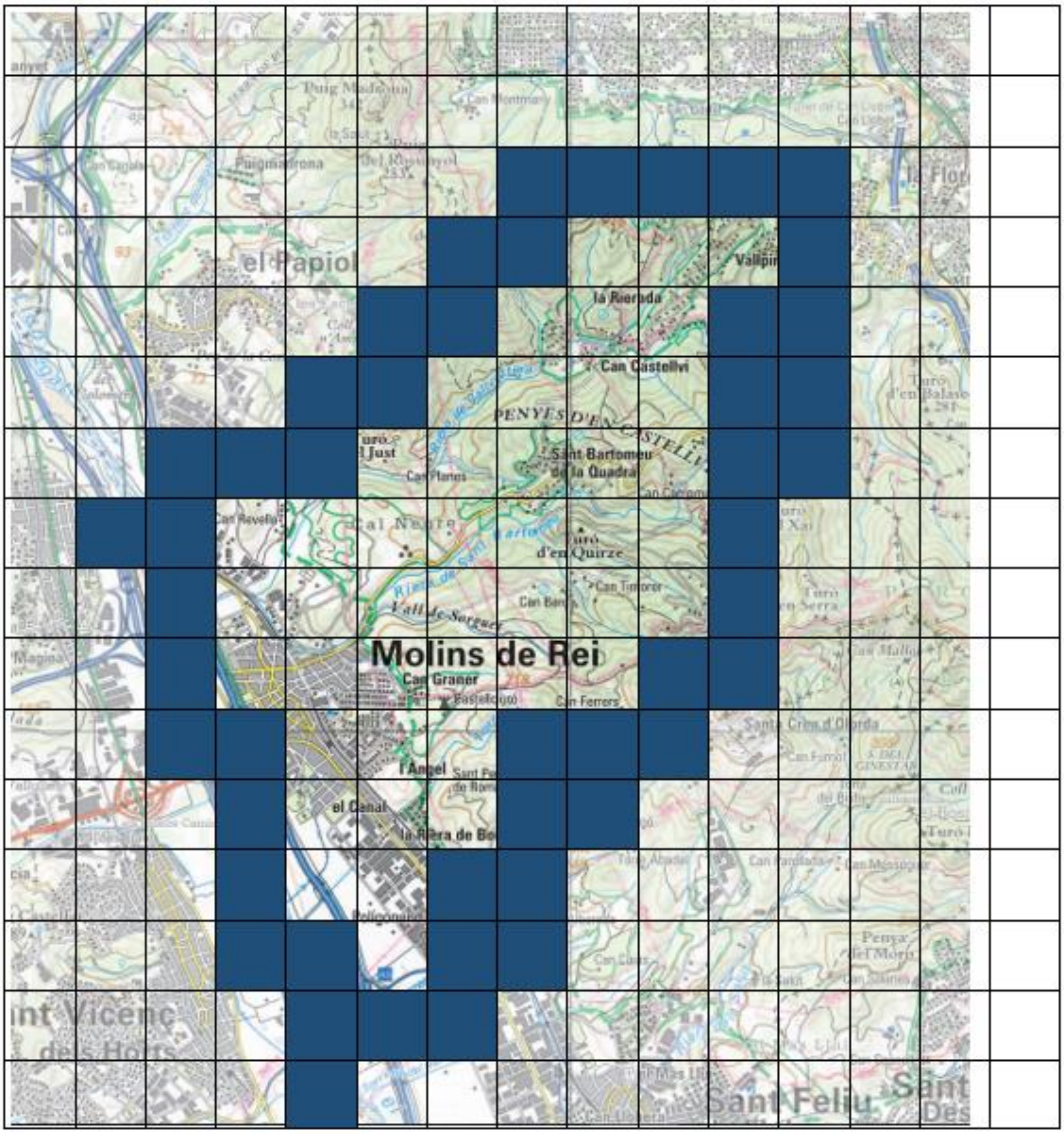
En aquest apartat intentarem trobar aproximadament la dimensió de la frontera de Molins de Rei basant-nos en la dimensió de Minkowski o de box-counting.

Veurem aproximadament quin seria el valor aplicant el límit amb tres exemples que s'aproximen cada vegada més.

La fórmula és la següent:

$$\dim_{\mathrm{box}}(S) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

En que N és el nombre de quadrats necessaris i ε la longitud d'aquests.




*Imatge 33: mapa de Molins de Rei*

En el primer cas, situem el plànol de Molins de Rei sobre quadrats la longitud dels costats és 0,0123 metres.

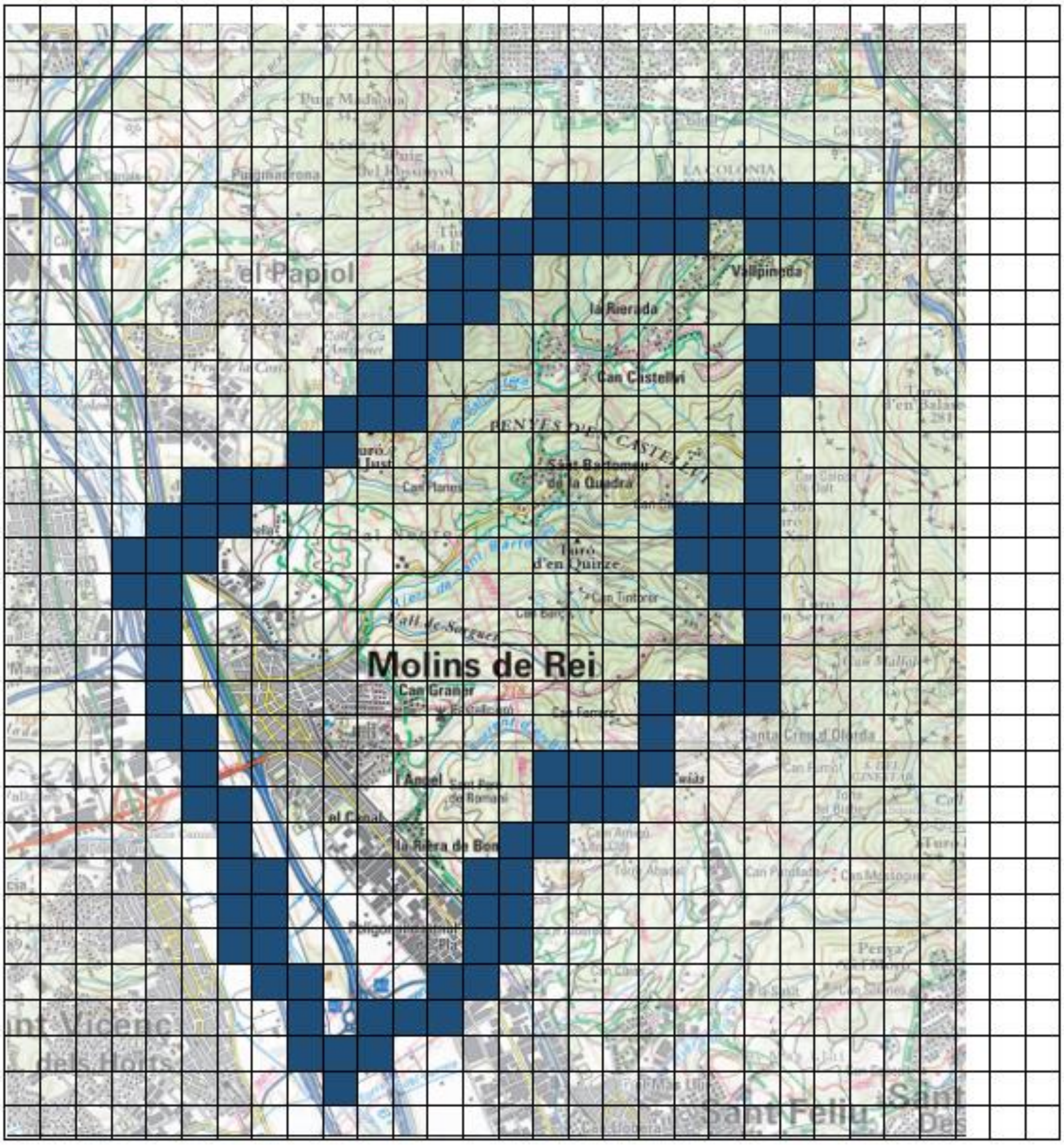
Si fem el recompte de quadrats obtenim que N = 48 quadrats.

Apliquem la fórmula de la dimensió de Minkowski:

$$\dim_{\text{box}}(S) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

$$D = \frac{\log 48}{\log \frac{1}{0{,}0123}} = 0{,}8802$$

Però 0,0123 metres no es un valor prou petit per acceptar aquesta dimensió com la correcta. Intentarem aproximar-nos encara més al costat 0.

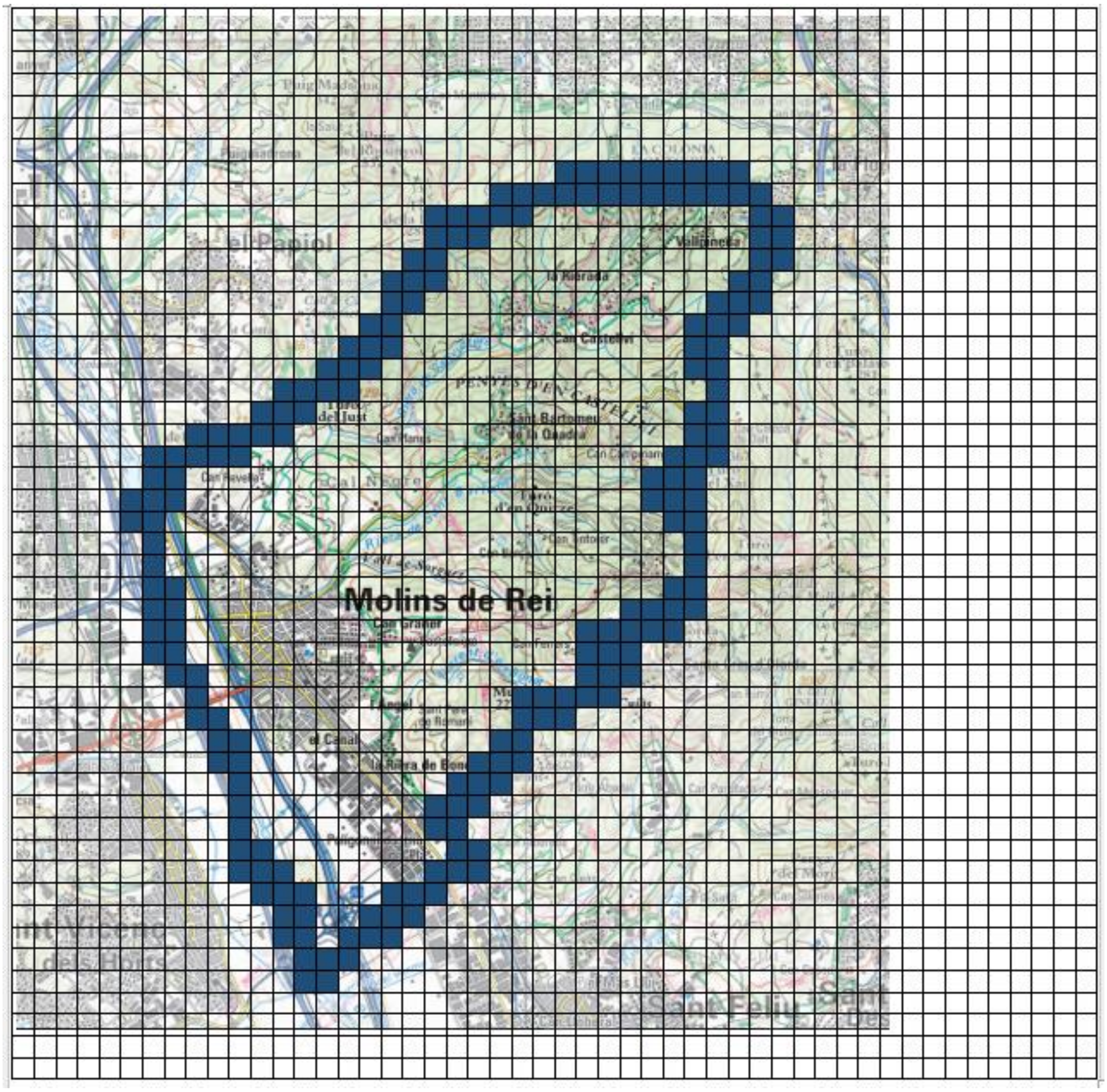



*Imatge 34: mapa de Molins de Rei*

En el segon cas, hem reduït la longitud dels costats per tal de que s'aproximin més a 0 metres. Ara la longitud dels costats és de 0,62cm = 0,0062 metres.

El nombre N de quadrats és de: 114.

Així doncs: D = $\frac{\log 114}{\log \frac{1}{0,0062}}$ = 0,9317




*Imatge 35: mapa de Molins de Rei*

Finalment, en l'últim cas hem agafat quadrats encara més petits per aproximar-nos al 0 encara més. Cada costat mesura 0,0042 metres.

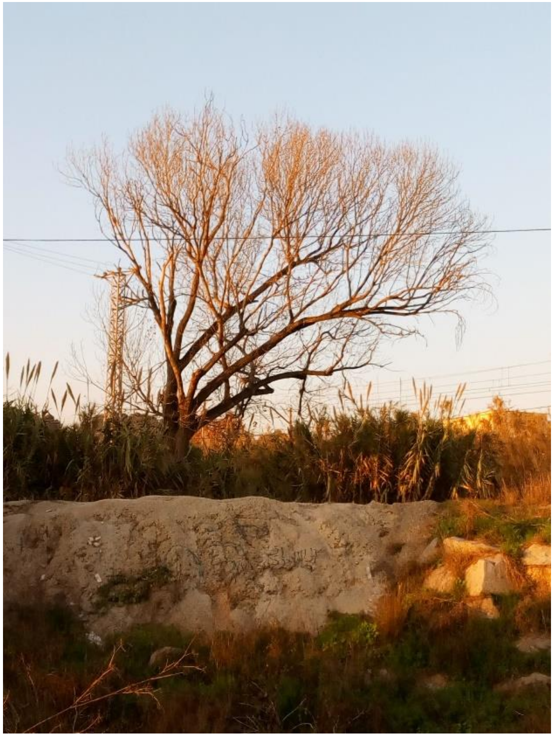
El nombre de quadrats que cal per recobrir tota la frontera en l'últim exemple és de 196.

D = $\frac{\log 196}{\log \frac{1}{0,0042}}$ = 0,9644

Com a conclusions, veiem que quan més ens apropem als quadrats de costat 0, la dimensió de la frontera de la vil·la augmenta lleugerament. Podem imaginar-nos que si apliquem la fórmula amb valors encara més propers a 0 la dimensió seria una mica més gran que 1; ja que segons els nostres coneixements sabem que una recta té una dimensió i un pla en té dues, i la frontera en aquest cas és una estructura una mica més complexa que una recta, ja que tendeix cap al pla. Si haguéssim de comparar el perímetre que delimita Molins de Rei amb un dels fractals que hem estudiat, aquest seria la "corba de Koch", ja que aquest és una recta que es va complicant. La dimensió d'aquest fractal és de 1,2618. Per tant, la dimensió de la frontera de Molins de Rei tindria un valor semblant – lleugerament superior a 1 i segurament inferior a la dimensió de la corba de Koch. La dimensió d'una frontera ens pot aportar informació, ja que aquesta està relacionada amb la complexitat del relleu de la zona.

## 2. ALTRES CASOS DE FRACTALS

Finalment, m'ha semblat interessant de cercar fractals que puguem veure durant el dia a dia a simple vista, i no només des d'un mapa, a la nostra vil·la. Tot i que podem trobar altres exemples, he focalitzat la cerca en llocs naturals, en els quals hi ha nombrosos fractals que resulten en figures excepcionals.

*Imatge 36-37: arbre*

La majora d'arbres són representacions clares i simples d'estructures fractals: el conjunt del tronc, branques principals i branquillons formen un entramat amb autosimilitud.


*Imatge 38-39*

Un altre cas (tot i que no s'acaba d'apreciar molt clarament en la imatge) podria ser el comportament d'algunes cascades o salts d'aigua, en els quals l'aigua tendeix a formar fractals quan cau.

*Imatge 40: salt d'aigua*

Les plantes trepadores creixen formant una estructura força curiosa i plena de ramificacions, que acaben donant lloc a estructures com la de la imatge.

*Imatge 41: planta trepadora*

L’escorça dels troncs i nombrosos vegetals i flors són també exemples de fractals. Les falgueres, en especial, són un dels casos més vistosos i freqüents: cada una de les seves fulles recorda a tot el conjunt de fulles, que al seu torn acaben recordant a tota la planta.

*Imatge 43: falguera*

*Imatge 42: escorça*

## CONCLUSIONS I OPINIÓ PERSONAL

Un cop acabada tota la cerca d'informació i obtingut els resultats de la part pràctica, cal analitzar aquestes dades.

Primerament, en contra del que em pensava inicialment, vull dir que les eines matemàtiques que es requereixen per tractar els fractals són força senzilles i assequibles per a tothom. Analitzar els fractals és força senzill un cop es veu la idea, ja que només cal aplicar el límit, i en el fons el resultat que s'obté acostuma a ser l'esperat i es força intuïtiu. Els fractals m'han acabat semblant unes figures increïbles i he pogut veure que tenen unes propietats molt diferents a qualsevol altre objecte matemàtic: la seva dimensió, perímetres o àrees infinits,... Un altre aspecte que m'ha sorprès dels fractals és la quantitat d'aplicacions que tenen en moltíssims camps.

També he pogut observar fractals a Molins de Rei. Aquesta part del treball m'ha permès posar en pràctica els meus coneixements i resoldre la pregunta de quins fractals seria capaç de trobar. He vist que mitjançant un mapa es poden detectar patrons fractals en diferents estructures, això vol dir que els rius i camins tendeixen a formar estructures fractals. Per altra banda, he pogut observar i fotografiar diferents fractals que podem trobar en el món natural, que n'és ple. Tot i que no he aprofundit més en el treball, crec que és adequat dir que els fractals tenen moltíssimes aplicacions actualment, però sobretot permeten explicar el comportament que segueix la naturalesa. Finalment, també m'agradaria destacar que les propietats fractals donen una bellesa i complexitat visual als objectes molt impressionant.

Crec que he pogut comprovar sense cap mena de dubte que de fractals n'hi ha a gairebé qualsevol paràmetre de la naturalesa; i, per tant, s'ha pogut demostrar que la geometria fractal té molta més rellevància que la geometria euclidiana en aquest aspecte.

Possiblement, també hauria pogut trobar fractals en altres àmbits de Molins de Rei. Una possibilitat de futur treball podria ser cercar la presència de fractals per exemple, en l'arquitectura de la vil·la.

Finalment, crec que el fet que la descoberta dels fractals hagi sigut tant recent encara deixa moltes portes obertes a les aplicacions d’aquests en un futur proper. Per això, seria necessari ampliar el coneixement que se’n té i estendre’l, per tal de que els fractals fossin coneguts per tothom.

**BIBLIOGRAFIA**

CSCAZORLA. ¿Qué son los fractales y cómo se construyen? [en línia]. http://www.xatakaciencia.com/matematicas/que-son-los-fractales-y-como-se-construyen [Consulta: 13-7-2016]definición.de. Definición de fractal [en línia]. http://definicion.de/fractal/ [Consulta: 13-7-2016]

Christian Terrón, Darío Villar, Diego Teijeiro, Gonzalo Fernández. Fractales. [en línia]. 2012. http://www.xatakaciencia.com/matematicas/que-son-los-fractales-y-como-se-construyen [Consulta: 13-7-2016]

Yale University. Fractal Geometry [en línia]. http://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/ [Consulta: 13-7-2016]

Resumen del curso de "Introducción a la Geometría Fractal" [en línia]. 2003 http://www.docentes.unal.edu.co/cibermudezs/docs/CursoGeometriaFractal.pdf [Consulta: 14-7-2016]

Viquipèdia. Fractal [en línia]. https://ca.wikipedia.org/wiki/Fractal [Consulta: 29-7-2016]

Wikipedia. Minkowski–Bouligand dimension [en línia]. https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski%E2%80%93Bouligand_dimension [Consulta: 29-7-2016]

Jorge Thiele. 2012. [en línia] https://maatematica.files.wordpress.com/2013/02/tr-fractals-jorgethiele-2012.pdf [Consulta: 4-8-2016]

Wikiedia. Conjunto de Cantor [en línia]. https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor [Consulta: 14-8-2016]

Wikiedia. Copo de nieve de Koch [en línia]. https://es.wikipedia.org/wiki/Copo_de_nieve_de_Koch [Consulta: 14-8-2016]

Alfonso González. [en línia]. 2015. http://www.alfonsogonzalez.es/curiosidades_matematicas/fractales/fractales.html#conjunto_mandelbrot [Consulta: 23-9-2016]

Wikiedia. Sumatorio [en línia]. https://es.wikipedia.org/wiki/Sumatorio [Consulta: 24-9-2016]

Vitutor. Límits. [en línia] http://www.vitutor.com/fun/3/a_1.html [Consulta: 4-10-2016]

Vitutor. Successions. [en línia] http://www.vitutor.com/al/sucesiones/suc4_Contenidos.html [Consulta: 4-10-2016]

Institut Cartogràfic de Catalunya. [en línia] file:///C:/Users/user/Downloads/molins_rei.pdf[Consulta: 6-12-2016]

Markov. Geometria fractal: jugant amb el caos i la natura. [en línia] http://fme.upc.edu/ca/premi-poincare/arxius/markov-geometria-fractal_jugant-am-el-caos-i-la-natura.pdf