



Generalitat de Catalunya  
Departament d'Ensenyament  
**Direcció General d'Educació Secundària  
Obligatòria i Batxillerat**

# ORIENTACIONS PER A LA MILLORA DE L'APRENTATGE DE LA GEOMETRIA

**Educació secundària obligatòria**

Juny de 2012

# INDEX

1. Introducció
2. La competència matemàtica
3. La geometria en el currículum de matemàtiques
4. Consideracions sobre el procés d'aprenentatge de l'espai i la forma
5. Consideracions sobre el procés d'aprenentatge de la mesura
6. Les matemàtiques i les altres matèries del currículum

ANNEX I: Qüestionari per a la reflexió sobre l'aprenentatge de la geometria

ANNEX II: Recursos i bibliografia

ANNEX III: Models d'activitats

## 1. Introducció

Aquest curs 2011-2012 s'ha dut a terme la primera edició de les proves d'avaluació de competències bàsiques de quart curs de l'educació secundària obligatòria per a l'alumnat de tots els centres educatius de Catalunya.

La prova sobre la competència matemàtica ha avaluat especialment la competència en càlcul, espai i forma, mesura, etc. Els resultats d'aquesta prova són indicadors molt importants que han d'ajudar els centres educatius a valorar fins a quin punt l'alumnat ha adquirit els diferents processos matemàtics i què cal fer, en endavant, per millorar-ne els resultats.

Un cop analitzats els resultats de la prova de matemàtiques, s'observa que cal posar més èmfasi en la millora de la geometria, que en el currículum es concreten en els àmbits d'espai i forma i de mesura, a fi que l'alumnat pugui acabar l'etapa de secundària obligatòria amb el màxim nivell de competència matemàtica.

La Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat ha elaborat el present document d'orientacions específiques per a la millora de l'aprenentatge de la geometria al llarg de l'etapa d'ESO amb la finalitat d'ajudar els centres a l'hora de treballar-la en la matèria de matemàtiques, però també en les altres matèries com les ciències de la naturalesa, les ciències socials, l'educació física, entre d'altres.

Cal treballar la geometria amb una metodologia que desenvolupi els processos de resolució de problemes, raonament, prova, comunicació i representació i connexió, entenent que, una major consciència del treball d'aquests processos en les activitats d'aprenentatge de l'alumnat, encara que aquí ens centrem en l'àmbit geomètric, ha de tenir efecte en el rendiment en tots els altres blocs curriculars de matemàtiques, que continuen tenint un gran marge de millora.

Les orientacions per a la millora de l'aprenentatge de la geometria volen contribuir en el procés d'**anàlisi dels resultats de les proves externes** de l'educació secundària obligatòria, tant de la prova d'avaluació de 4t d'ESO com de la prova d'avaluació diagnòstica de 2n curs. El procés d'anàlisi de resultats requereix preguntes, davant dels resultats obtinguts, com ara: què es pot fer per millorar? Què millorar? En què obtenim bons resultats?

Respondre aquestes preguntes demana la reflexió i el diàleg en el si de l'equip docent de centre i s'ha d'abordar no solament des de protocols o tècniques merament quantitatives, sinó que requereix revisar la comprensió dels processos educatius i les metodologies emprades pel professorat.

Per exemple, en relació amb la geometria, ens podem formular diferents preguntes sobre aspectes que cal tenir en compte en el seu procés d'ensenyament i aprenentatge:

- **Rellevància dels contextos.** Estem utilitzant l'entorn quotidià com a font de situacions i problemes d'espai i forma i de mesura? Estem contextualitzant les activitats geomètriques que proposem a l'alumnat? Estan situades en algun moment històric rellevant (per exemple: la mesura del radi de la Terra amb el mètode d'Eratòstenes) que pugui motivar l'alumnat?

- **Equilibri, connexió entre els continguts i treball interdisciplinari.** En quin ordre, al llarg de cada curs de l'ESO, abordem els diferents blocs curriculars? Algun dels cursos s'inicia amb un treball a fons dels continguts geomètrics? O bé, es tracten

sempre en moments avançats del curs? Els treballem sempre com un bloc tancat o també mitjançant activitats de tipus transversal? S'exploren les possibilitats de treball interdisciplinari entorn a l'espai i la forma (per exemple amb Educació visual i plàstica) i la mesura (per exemple amb Ciències de la naturalesa)?

• **Valoració d'actituds relacionades amb les matemàtiques.** Les activitats relacionades amb la geometria i la mesura són sempre de tipus algorísmic, calculístic, d'execució de procediments? O bé, incloem activitats on hi càpiguen la curiositat, la creativitat, la imaginació o el descobriment?

• **Diversitat en les formes de treball.** En l'aprenentatge del nostre alumnat, a més del treball individual, combinem activitats a realitzar en gran grup i en petit grup? Com utilitzem les TIC en l'aprenentatge de la geometria o la mesura? Quin paper hi tenen la visualització i la manipulació d'objectes i de materials didàctics? Hi ha espai per a la comunicació, la discussió d'idees i la síntesi de propostes? Plantegem projectes de recerca en geometria?

Les orientacions d'aquest document són unes reflexions sobre el desenvolupament de la competència matemàtica de l'alumnat, que fan referència a continguts, processos i metodologies didàctiques, així com consideracions sobre el procés d'aprenentatge en els casos concrets de la geometria. S'incorporen també documents annexos que fan referència a:

- Models de qüestionaris per a la reflexió sobre l'aprenentatge de la geometria.
- Recursos actualment disponibles a través de diferents pàgines i portals d'internet, així com diferents referències bibliogràfiques, sobre l'educació matemàtica.
- Exemples i models d'activitats relacionades amb la geometria.

## 2. La competència matemàtica

Abans de referir-nos a la millora de l'aprenentatge de la geometria, convé emfasitzar que la competència matemàtica, tal com es defineix al currículum vigent, abasta una gran varietat d'habilitats i coneixements, de manera que resultaria més aclaridor parlar d'un gran camp competencial matemàtic dins del qual establir una sèrie de competències amb perfils més definits. El currículum ja dona els criteris per dibuixar aquests perfils quan, més enllà dels **blocs de continguts** tradicionals (numeració i càlcul; canvi i relacions; espai i forma; mesura; estadística i atzar), explicita quins són els **processos** que es desenvolupen al llarg de tot treball matemàtic: la **resolució de problemes**; el **raonament i la prova**; la **comunicació i la representació**; la **connexió entre continguts**. És condició necessària per a l'assoliment de la competència matemàtica que cadascun d'aquests processos sigui ben present en el quefer matemàtic de l'alumnat, tant si l'organització del curs respon a una seqüenciació tradicional de continguts com si s'ha optat per una organització en projectes o amb qualsevol altre criteri.

En el moment d'emprendre un procés d'anàlisi i reflexió sobre la manera com es treballa la competència matemàtica en un centre, el professorat de la resta de matèries ha de ser conscient d'aquesta articulació per processos del currículum de matemàtiques. En totes les activitats que es programin amb el propòsit de treballar aquesta competència, caldrà parar un esment especial a definir i avaluar com es desenvolupen els processos matemàtics implicats.

L'autèntic perfil competencial del treball matemàtic ve donat pel desenvolupament dels processos. En conseqüència, si bé és important consensuar l'enfocament conjunt que es dona a determinats continguts encara ho és més acordar amb visió d'equip docent la manera de treballar i avaluar la **resolució de problemes** (entesa en sentit ampli, no únicament matemàtic: generar preguntes, planificar i desenvolupar estratègies, experimentar, validar respostes, sintetitzar processos i resultats), els processos de **raonament** (intuir, conjeturar, particularitzar, generalitzar, argumentar), la **representació** (amb paraules, gràfics, símbols) i, com a pedra angular de l'aprenentatge, la **comunicació** oral, escrita i audiovisual amb la finalitat general d'obtenir, interpretar i generar informació.

Pel que fa a les metodologies didàctiques que es poden emprar en el desenvolupament de la competència matemàtica, cal tenir en compte prioritàriament aquelles que fomentin tota mena d'interaccions en les diverses fases del procés d'ensenyament i aprenentatge i aquelles que estimulen el pensament crític, la participació i la col·laboració. En conseqüència, les diferents metodologies didàctiques han de fer possible que:

- es puguin afrontar i resoldre de manera autònoma i cooperativa les situacions educatives que es plantegin
- es desenvolupin capacitats pròpies del pensament crític (valorar idees i punts de vista diferents, comprendre per actuar, prendre decisions raonadament, resoldre problemes valorant la pertinença de les diferents informacions...)
- i es fomentin les habilitats socials i de comunicació per comprendre les raons d'altri, per justificar els propis punts de vista, argumentar-los, etc.

### 3. La geometria en el currículum de matemàtiques

Com hem dit anteriorment, el currículum de l'educació secundària obligatòria estableix un doble focus per abordar el treball matemàtic. D'una banda, els **cinc blocs de continguts** (**numeració i càlcul; canvi i relacions; espai i forma; mesura; estadística i atzar**) suposen una organització dels conceptes i procediments matemàtics coherent amb la tradició d'aquesta ciència. D'altra banda, la necessitat d'assegurar el caràcter competencial de l'aprenentatge matemàtic ha comportat una insistència en els **processos** que cal desenvolupar quan es treballen els continguts, processos sense els quals l'aprenentatge matemàtic queda mancat de profunditat i l'alumnat queda en inferioritat a l'hora d'aplicar el coneixement matemàtic nou en diferents contextos.

Així, doncs, hem d'assegurar que el treball de geometria (continguts d'espai i forma i de mesura) no perdi mai de vista els quatre processos establerts al currículum: la **resolució de problemes**, el **raonament i prova**, la **comunicació i representació** i la **connexió entre continguts** (de blocs no geomètrics o d'altres matèries del curs o etapa).

La **resolució de problemes** facilita la construcció de nous coneixements, en mostra la utilitat, fomenta el desenvolupament d'estratègies de resolució i d'anàlisi, i constitueix un camp molt ric per a la transferència de l'aplicació de conceptes. D'entrada, la geometria pot ser especialment important en el moment de traduir una situació a elements matemàtics que permetin enfilar la resolució: un dibuix, un esquema... La pràctica d'aquestes traduccions "visuales" permetrà assolir destresa en l'elecció de maneres de representació eficients. Però el treball de l'espai i la forma en la resolució de problemes no es restringeix al plantejament; cal proposar problemes que la seva resolució requereixi mesurar o aplicar relacions geomètriques: construir, desenvolupar, projectar, ubicar, localitzar, seccionar figures...

El **raonament i la prova** són processos de desenvolupament del coneixement mitjançant la reflexió, la conjectura, l'argumentació, el contrast i l'anàlisi, obrint la perspectiva a altres maneres d'arribar a resultats vàlids, defugint la noció (força arrelada en part de l'alumnat) de l'existència d'una via fixada, que cal "descobrir", per arribar a un resultat correcte. El raonament no és un procés que posi en joc només entitats abstractes (simbologia, notació algebraica) sinó que també s'aplica a situacions concretes i tangibles. Ja que el raonament implica analitzar situacions (comparant i contrastant), fer conjetures, comprovar-les, experimentar, relacionar conceptes, establir models i patrons... caldrà dur a terme aquestes accions també en situacions properes a l'alumne/a, situacions que pugui veure i tocar. L'alumnat ha de poder fer, també, argumentacions referides a l'espai i la forma (propietats de figures geomètriques, construccions a partir d'elements donats...). El camp de la geometria ofereix moltes possibilitats per a la visualització de propietats i, fins i tot, per a la demostració i el raonament.

La **comunicació i la representació**, ja siguin de la informació, de les idees o de les estratègies i processos seguits, comporten l'organització i l'estructuració del propi coneixement, tant per donar-li ordre i coherència com per possibilitar el contrast amb altres formes de fer. Cal potenciar l'ús de diferents formes de representació (que té un caire més visual) per comunicar allò que es vol expressar, a partir de la verbalització fins arribar, de manera progressiva, al llenguatge simbòlic. Aquest procés afavoreix la incorporació gradual del llenguatge específic de les matemàtiques i esdevé una eina per resoldre problemes.

Algunes de les varietats de representació usuals en matemàtiques incideixen de ple en aspectes d'espai i forma: dibuixos, construccions amb materials manipulables, gràfics... Però això no vol dir que en el treball geomètric només haguem d'utilitzar formes de representació visuals, sinó que altres representacions com taules, símbols o recursos TIC (per exemple, programes de geometria dinàmica) també han de ser part important del treball geomètric. Els diversos tipus de representació proporcionen diferents vies d'aproximar-se a les idees matemàtiques, d'organitzar-les i de comprendre-les, per la qual cosa en l'estudi de la geometria és convenient utilitzar també formes no estrictament visuals. Però tampoc es pot caure en l'altre extrem i fer un ús prematur de símbols i fórmules que pot resultar poc significatiu per a l'alumnat; al treball simbòlic (p.ex., fórmules de superfícies i volums) s'hi ha d'arribar després de molt de treball de dibuix i de construcció física, i mai el pot substituir completament, sinó que han de conviure.

Un bon indicador del grau de comprensió d'una idea matemàtica és la capacitat de relacionar les diferents representacions d'aquesta idea i triar la forma de representació més adequada a la situació i propòsit plantejat. Les diferents formes de representació han de ser presents, amb més o menys rellevància, en els diferents cursos de l'etapa.

La **connexió** entre els continguts de les matemàtiques i els continguts d'altres matèries (visual i plàstica, física i química, ciències de la naturalesa, tecnologia, ciències socials, ... ), permet eixamplar la comprensió de les matemàtiques ja que posa de manifest la seva coherència i multiplica els recursos disponibles per afrontar una situació. Al mateix temps, permet dotar de major sentit les programacions docents i l'aprenentatge dels alumnes, que viuen en un món farcit de connexions i es troben que sovint l'escola presenta el coneixement massa compartimentat.

Hi ha alguns conceptes matemàtics que, per la seva naturalesa, permeten múltiples connexions, com ara la proporcionalitat, que admet un tractament numèric, geomètric, de mesura, funcional o probabilístic. O l'àlgebra, que també permet connectar aspectes numèrics, geomètrics, de mesura i funcionals. Hi ha connexions evidents entre el bloc de mesura i el bloc de nombres (fraccions, decimals) o entre el bloc de mesura i el bloc d'espai i forma (equivalència de figures).

Així mateix, el treball en la pròpia matèria de matemàtiques no hauria de perdre mai de vista els contextos reals ni l'origen dels conceptes o procediments. Per exemple, la mesura i l'estadística ofereixen oportunitats evidents, però de fet en tots els blocs de continguts matemàtics podem explotar les connexions amb les altres matèries del currículum.

## 4. Consideracions sobre el procés d'aprenentatge de l'espai i la forma

En el nostre entorn quotidià és on trobem objectes, formes, dissenys i transformacions i on podem identificar les propietats geomètriques més significatives.

Les activitats de geometria que s'han treballat durant tota l'etapa d'educació primària ja acosten els alumnes a un coneixement més proper del seu entorn geomètric, però és a partir de l'educació secundària obligatòria que cal consolidar-lo i afegir-hi un grau més de profunditat.

Aquest treball ha de ser una continuació del que han fet en l'etapa anterior i no l'han de reduir només a l'estudi d'algorismes per al càlcul d'algunes distàncies, superfícies i volums. En general, les dificultats que es presenten en el càlcul de magnituds no són degudes a no haver treballat amb profunditat els algorismes de càlcul, sinó a no haver assimilat correctament els conceptes d'àrea i de volum d'un cos de tres dimensions i la percepció de la forma i dels elements que s'hi poden observar.

En el treball geomètric caldria donar força importància al plantejament de situacions en l'espai i a la manipulació de figures tridimensionals per superar les dificultats de visualització espacial, sense la qual el treball en dues dimensions no passa de ser una convenció mancada d'entitat real. En els primers anys de l'educació secundària obligatòria s'ha de prioritzar la geometria espacial. El treball amb figures planes, tot i tenir la seva importància, ha de ser un suport per al treball en tres dimensions.

Amb experiències sensibles, visuals i tàctils, els nostres alumnes aconseguiran desenvolupar la visualització i comprensió de les formes perquè més endavant, tot demanant anticipació a aquesta manipulació, puguin aprofundir la visualització i comprensió de les relacions.

Aquesta percepció geomètrica és necessària per a abordar situacions de construcció, descomposicions i desplegaments i, a més, els facilitarà el treball posterior amb la geometria analítica, ja que seran capaços d'imaginar-se les situacions problemàtiques que es plantegin.

Un cop s'han superat les etapes d'observació, actuació, reflexió i interiorització, és possible passar a l'abstracció.

El treball amb materials dins d'un ambient de laboratori, d'exploració i d'experimentació on l'alumne/a sigui el participant actiu del seu coneixement serà l'ambient ideal per a arribar als objectius anteriorment plantejats.

Per tal que els alumnes avancin en la percepció visual d'un cos, cal proposar primerament activitats que els permetin la construcció de cossos estàndard (poliedres i cossos rodons) i no estàndard (per exemple, l'ús de polícubs) amb els quals es pugui realitzar un treball de descripció de propietats i característiques.

Després podran passar a la visualització i interpretació de les vistes de cossos ja construïts sia físicament o visualment. Com a complement d'aquesta activitat tenim el desplegament de figures, el qual ens permetrà veure si relacionen correctament:

- el desenvolupament pla de la figura i la figura tridimensional
- les característiques de la figura: nombre i forma de les cares



- la situació de la figura, que determina com van les cares laterals en el desplegament
- l'habilitat de dibuixar

També es poden fer servir programes de geometria dinàmica (com el GeoGebra) i applets específics que treballin les diferents vistes de diferents figures i perspectives.

Finalment, per a aprofundir la visualització, podem treballar la construcció de cossos a partir de les seves vistes.

Cadascuna d'aquestes activitats, que parteixen de la manipulació, ha d'encaminar-se cap a una anticipació de les experiències, cap a una visualització mental de les situacions que finalment permetin als alumnes d'aquesta etapa poder conjeturar i solucionar problemàtiques senzilles sense la necessitat de l'ús previ de materials. Tot i això, aquesta visualització mental no s'ha d'entendre com una «superació» de la manipulació, sinó com una capacitat diferent que l'alumne/a desenvolupa; el treball manipulatiu haurà de continuar essent present en l'activitat matemàtica de l'alumnat en totes les etapes.

Un bon aprofitament d'aquestes activitats ajudarà l'alumnat a poder resoldre futures dificultats en el treball espacial.

Pel que fa al càlcul de les àrees, els alumnes haurien de començar identificant les figures geomètriques i els seus elements més significatius. La verbalització en la descripció dels elements més significatius i de les seves propietats és una tasca que l'alumnat consolidarà en aquesta etapa.

Abans d'arribar al càlcul d'àrees simples mitjançant fórmules, és bo reforçar el càlcul mitjançant trames (el treball amb geoplà en seria un bon exemple), remarcar el caràcter multiplicatiu de les dues dimensions i la descomposició de les figures planes en d'altres més senzilles com ara quadrats o triangles.

El càlcul d'àrees per comparació amb la unitat, tot i ser un procediment vàlid i necessari per a introduir el concepte d'àrea i la relació amb les unitats, no és generalitzable especialment al càlcul de figures no estàndard. En canvi, sí que és útil per al càlcul estimatiu de magnituds.

En els primers cursos de l'educació secundària, els alumnes haurien d'haver assolit plenament aquest primer estadi del càlcul de superfícies per a passar a utilitzar altres procediments (compleció i descomposició) més avantatjats i incorporar-los al seu coneixement.

El reforç del caràcter multiplicatiu de les dues dimensions s'ha de posar en contraposició amb el perímetre (addició) fent veure, per exemple, com figures amb el mateix perímetre poden tenir diferent superfície o a l'inrevés. És aquí on gran part dels nostres alumnes s'equivoquen i on hauran de treballar amb atenció per a saber diferenciar perfectament àrea, longitud d'un costat i perímetre.

Finalment i no pas com a únic objectiu, arribaran a poder treballar l'ús de les fórmules i la justificació d'algunes d'elles.

En el cas del volum, perquè els alumnes avancin correctament en l'aprenentatge, primer caldrà unificar i precisar la definició de volum d'un cos i la seva estreta relació amb la capacitat.

La relació de les unitats dels dos conceptes també és un bon punt de partida, especialment aquelles que apareixen més sovint en la nostra vida quotidiana. Diuen que una imatge val més que mil paraules; així, doncs, mostrar de manera real que un cub d'1 dm de costat és equivalent a la capacitat d'un bric de llet o de suc d'1 L, sia amb sorra o amb aigua, pot ser la millor manera perquè no oblidin mai més aquesta equivalència.

D'altres equivalències poden ser treballades amb les llaunes de beguda (3 llaunes equivalen a 1 litre?), que, com a treball de consolidació, també ens poden servir per a veure la diferència entre volum i superfície (les llaunes "altes i primes" de 33 cl tenen la mateixa superfície que les tradicionals "baixes i amples"?) fins a mostrar que dos cossos amb el mateix volum poden tenir diferent superfície o a l'inrevés. El disseny actual ens pot aportar molts exemples més sobre això.

L'objectiu final de tot aquest aprenentatge és que els alumnes reconeguin la importància i la necessitat de lligar el concepte de volum amb el producte de les tres longituds o amb el producte d'una superfície per una longitud.

Igual que el geoplà amb l'àrea, en el cas del volum els ja esmentats políedres poden ser també molt útils per a la consolidació final d'aquest concepte.

Finalment, s'hauria d'arribar a una certa formalització del model a través de fórmules que facin avançar els alumnes cap a un procés de deducció formal, però sense perdre mai de vista el sentit geomètric dels símbols que es manegen.

De manera complementària a aquestes activitats d'àrees i volums és important el treball de propostes que desenvolupin la visualització de relacions de les propietats i característiques de les figures planes i espacials.

## 5. Consideracions sobre el procés d'aprenentatge de la mesura

En arribar a l'ESO, els alumnes ja tenen moltes experiències de l'etapa anterior i de la vida diària pel que fa al tema de la mesura. A partir d'aquestes experiències formals i no formals, caldria que fossin capaços de continuar construint el seu coneixement sobre la longitud, l'àrea i el volum, les unitats i els sistemes de mesura, l'ús d'instruments de mesura, la precisió i el sentit de l'error (tant en la mesura com en la seva propagació en els processos de càlcul).

Aspectes rellevants que cal tenir presents per a aquesta etapa són: elegir i utilitzar unitats d'acord amb les característiques que es volen mesurar, estimar mesures, seleccionar unitats i escales apropiades d'acord amb la precisió desitjada, i resoldre problemes sobre càlcul de perímetres i àrees de figures bidimensionals, i també sobre càlcul d'àrees i volums d'objectes tridimensionals. Els alumnes també haurien de ser eficients en la mesura d'angles i en l'ús de raons i proporcions per a resoldre problemes sobre escales, semblança i magnituds derivades.

La mesura està fortament relacionada amb altres blocs del currículum i representa una oportunitat clara de treball interdisciplinari, de manera que té sentit pensar que els conceptes i habilitats relacionats amb la mesura es poden tractar durant tot el curs escolar en lloc de treballar-se com una unitat per separat. De fet, en les proves externes que es passen a Catalunya, el bloc de mesura es considera integrat amb el d'espai i forma.

Molts temes de mesura estan íntimament relacionats amb allò que els alumnes aprendran d'espai i forma (perímetres i àrees), de canvi i relacions (proporcionalitat geomètrica i escales) i d'estadística i atzar (recollida i mesura de dades amb les unitats corresponents), i fins i tot molts conceptes i habilitats relatius a la mesura es poden aprendre i aplicar en l'estudi d'altres àrees del currículum (ciències naturals, ciències socials, tecnologia, educació visual i plàstica i educació física).

Es consideren a continuació diversos aspectes que cal tenir en compte a l'hora de planificar el procés d'aprenentatge sobre la mesura.

### ***La mesura de figures dibuixades sobre un paper***

Cal pensar que mesurar figures dibuixades en un paper és una destresa o habilitat que els alumnes ja tenen en arribar a l'educació secundària. Potser el més important és que no perdin l'hàbit d'emprar estris de mesura, especialment el regle graduat i el transportador d'angles. En ocasions un càlcul a partir d'un dibuix pot ser una primera aproximació i pot ajudar a pensar una solució més elaborada i complexa.

### ***Les mesures experimentals reals***

El treball de mesura experimental, ja iniciat en l'educació primària, no ha de limitar-se a la mesura sobre paper. És imprescindible que l'alumnat realitzi experiències (embolicant, omplint, relacionant...) que assegurin el desenvolupament intuïtiu (en definitiva, la capacitat d'estimació) de mesures reals: paper per a embolicar, ampolles, olles, prestatges, armaris... També poden usar-se jocs que són habituals a l'aula de matemàtiques. Així, en un tangram, que s'utilitza sovint per a treballar la geometria, poden estudiar-se les relacions entre les mesures de les diverses peces. La pràctica de les mesures reals, amb el desenvolupament de la capacitat d'estimació, ha d'estendre's als mètodes indirectes (mesures per Thales, proporcionalitat, construcció de goniòmetres), que esdevindran essencials en els treballs de camp.

### ***Les mesures reals d'una figura o objecte dibuixats a escala***

Aquesta és una situació que té més a veure amb la proporcionalitat geomètrica i la semblança però que, per la seva importància en tot el càlcul de mesures indirectes, no es pot obviar. Quan els alumnes mesuren un objecte, el resultat ha de tenir sentit; les estimacions i les referències poden ajudar els alumnes a reconèixer quan és raonable una mesura. Aquesta mateixa consideració també s'ha de fer quan la mesura no és el resultat d'un amidament directe, sinó que és el resultat d'un amidament indirecte; en aquest cas seria el resultat de mesurar directament en el plànol i després calcular, d'acord amb l'escala, la mesura real.

### ***La construcció o interpretació de dibuixos a escala***

Els problemes relatius a la construcció o interpretació de dibuixos a escala ofereixen oportunitats per a utilitzar i incrementar el coneixement de la semblança, la raó i la proporcionalitat. Aquests problemes tenen diverses fonts: mapes, plànols, activitats científiques i fins i tot la literatura. Per exemple, en els Viatges de Gulliver, novel·la de Jonathan Swift, molts passatges suggereixen problemes relacionats amb escales, semblances i proporcionalitat.

Prendre mesures de la classe, del pati de l'institut, de la pròpia habitació i decidir després a quina escala cal fer el plànol perquè càpiga en un full DIN A4 i sigui una escala eficaç, en què el canvi realitat-dibuix i viceversa sigui ràpid i, si pot ser, amb càlcul mental, són exemples d'activitats que poden ajudar l'alumne en la comprensió de la utilització de plànols i escales.

### ***La relació entre longitud, àrea i volum***

Tot i que els alumnes ja han iniciat en l'etapa d'educació primària l'estudi dels conceptes d'àrea i volum, molts necessiten experiències addicionals amb mesures directes per aprofundir la comprensió de l'àrea de figures de dues dimensions i l'àrea i el volum d'objectes tridimensionals. Fins i tot en aquesta etapa pot ser adequat per a molts alumnes mesurar àrees recobrint superfícies i calcular volums interiors d'objectes omplint-los de líquid. Amb aquestes experiències es pot ajudar els alumnes a clarificar conceptes relacionats amb la mesura. Molts alumnes experimenten certa confusió sobre per què s'utilitzen els quadrats unitaris i els cubs unitaris per a mesurar àrees i volums si les figures no són quadrades i els cossos no són cúbics. Passar prematurament a utilitzar fórmules, sense tenir una base conceptual adequada d'àrea i volum, porta a molta confusió.

Sempre que sigui possible, els alumnes hauran de desenvolupar fórmules i procediments significatius a través d'investigacions en lloc de memoritzar-los.

### ***La diferència entre àrea i perímetre d'una superfície plana***

La pràctica de mesurar objectes pot ajudar els alumnes a desenvolupar una bona comprensió de les relacions entre les diferents mesures d'un objecte i les unitats més apropiades per a mesurar-los. També en aquest sentit molts alumnes tenen la falsa idea que figures de dues dimensions amb la mateixa àrea tenen el mateix perímetre; calen activitats de mesura directa per a enfocar i corregir aquesta concepció. Un cop analitzada la diferència amb activitats manipulatives es podrà passar a una segona etapa amb càlculs d'àrees i perímetres de figures diverses.

## ***Estimar mesures***

En la pràctica habitual dels alumnes caldrà utilitzar referències per a estimar mesures i contrastar-les amb el resultat d'un procés de càlcul. En qualsevol procés de resolució d'un problema o situació, és important que els alumnes adquireixin l'hàbit de ser crítics davant el resultat obtingut, tant si és el resultat d'un càlcul fet mentalment, a mà o amb mitjans tècnics. Cal que tornin a la situació de partida i analitzin si el resultat és coherent i té sentit a partir del que s'ha demanat. En el cas de situacions en què apareixen mesures, directes o indirectes, l'alumne hauria de ser capaç de rebutjar certs resultats finals i també resultats intermedis.

## ***El treball de camp***

L'aprenentatge de la mesura comporta dos vessants:

- fer-se una idea del que es vol mesurar i decidir quina és la unitat i l'instrument més convenient
- mesurar correctament, utilitzant tècniques, instruments i fórmules adients

El treball de camp reuneix amb molta naturalitat aquests dos vessants, per això cal tenir-lo present a l'hora de parlar de l'aprenentatge de la mesura. Plantejar alguna situació en què els alumnes, en petits grups de tres o quatre, prenguin mesures sobre el terreny, experimentin quines dificultats han de superar per a prendre mesures, triïn unitats, instruments per a mesurar, etc. i després hagin de decidir com representen acuradament damunt el paper tot el que s'ha mesurat, és una activitat molt completa que servirà per a treballar la mesura en tota la seva amplitud.

A més, el treball de camp és una bona ocasió per a fomentar el treball interdisciplinari amb altres àrees. Es poden construir instruments de mesura a tecnologia. Es pot sortir a prendre mesures i elaborar plànols per a ciències de la naturalesa o per a educació física. Després es pot cloure el procés amb un informe detallat elaborat a la manera dels informes del laboratori que es redacten per a ciències de la naturalesa.

## 6. Les matemàtiques i les altres matèries del currículum

La presència en el currículum de la competència matemàtica es justifica per l'existència de nombroses situacions en la vida personal, social i escolar que requereixen l'ús de les matemàtiques per poder ser analitzades, interpretades i valorades. Aquesta competència difícilment s'adquireix si no s'orienta l'aprenentatge dels continguts de manera que es possibiliti la seva utilització fora de les classes de matemàtiques, tant en la vida diària dels alumnes com en totes les altres matèries.

La competència matemàtica s'ha d'adquirir a partir de contextos que tinguin sentit per a l'alumnat i siguin rellevants per al coneixement matemàtic que es pretén desenvolupar. Aprendre amb significat és fonamental per capacitar l'alumnat en l'ús de tot allò que aprèn i per capacitar-lo a continuar aprenent de forma autònoma al llarg de tota la vida.

El currículum determina un seguit de continguts idonis per ser treballats conjuntament entre matemàtiques i altres matèries.

Hi ha qüestions numèriques que es poden treballar en ciències de la naturalesa, biologia i geologia o física i química (temperatures per als nombres positius i negatius, dissolucions o dietes alimentàries per als percentatges, escales de vents, terratrèmols i altres fenòmens per a diferents tipus d'escales numèriques, el món macroscòpic i microscòpic per als ordres de magnitud i els nombres molt grans i molt petits...), en ciències socials (el temps històric per a la línia numèrica i intervals, el tant per cent, tant per mil i tant per u en contextos diversos...) o en l'educació física (sistemes de puntuació, freqüència cardíaca, grau d'esforç, estadístiques en l'esforç...), per esmentar-ne algunes.

També són nombrosos els casos de temes relacionats amb probabilitat i estadística en ciències socials (demografia, economia, índexs...) o ciències de la naturalesa (genètica).

I, naturalment, el canvi i la relació (sigui com a dependència funcional o d'altres tipus) són presents en les ciències de la naturalesa (lleis del moviment, lleis dels gasos...), en tecnologia (lleis d'Ohm, circuits elèctrics...), en ciències socials (climogrames, piràmides de població, diversos tipus de gràfics estadístics...) o en música (elements d'harmonia i ritme, relacions entre les freqüències dels diferents sons, justificació de l'escala pentatònica).

### ***La geometria en les altres matèries del currículum***

D'entre els continguts d'espai i forma i de mesura del currículum de matemàtiques, n'hi ha uns quants especialment apropiats per al treball conjunt amb altres matèries. Aquest fet s'indica explícitament en l'actual currículum d'ESO, propi de matemàtiques.

En primer lloc, l'educació visual i plàstica ha de ser el gran aliat de les matemàtiques per treballar la percepció i la descripció objectiva de les **formes**.

La construcció de figures tridimensionals ha de recolzar-se en les matèries d'educació visual i plàstica i tecnologia.

Podem trobar contextos per treballar la representació sobre el pla d'objectes tridimensionals en ciències socials (cartografia), tecnologia (representacions tècniques,

escales, cotes...) o educació visual i plàstica (per exemple, les representacions bidimensionals d'obres arquitectòniques).

Les ciències de la naturalesa i la tecnologia permeten, en general, el treball aprofundit de les unitats, els instruments i les tècniques de mesura. L'òptica i l'astronomia, en particular, proporcionen situacions per treballar la mesura angular.

## Annex I – Qüestionari per a la reflexió sobre l'aprenentatge de la geometria

Abans de reflexionar sobre la metodologia emprada, una primera acció que cal dur a terme és comparar què s'ha fet durant el curs i què prescriu el currículum. Verificar què s'ha treballat i què no, i quines motivacions hi ha per haver-ho fet d'aquesta manera. Això pot ajudar a reorientar la selecció de continguts i el seu desenvolupament en propers cursos.

Pel que fa a la metodologia, a continuació es proposa un qüestionari que permet al professorat:

- Analitzar les activitats que es porten a terme amb els alumnes per a l'aprenentatge de l'espai i la forma i de la mesura (que ha de ser inclosa també en blocs no estrictament geomètrics), tant dins la matèria de matemàtiques com en altres matèries del currículum.
- Reflexionar sobre la metodologia més adient per a treballar en el marc de l'aula amb aquesta finalitat.
- Prendre decisions sobre la gestió docent per a afavorir l'aprenentatge de la geometria i de la mesura.

Es recomana que cada professor/a respongui aquest qüestionari individualment i que després, en una segona fase, es faci una posada en comú i es discuteixi en els departaments i en els equips docents a fi d'arribar a acords de millora.

	Molt sovint	Sovint	Alguna vegada	Gairebé mai
<b>A classe es proposen la realització d'activitats i el foment d'actituds com:</b>				
A. Pel que fa a la visualització				
1. Buscar figures geomètriques de l'entorn.				
2. Analitzar els elements de les figures: cares, arestes, vèrtexs.				
3. Discutir en grup i definir les característiques de les figures planes i espacials.				
4. Imaginar i fer recobriments de cossos (embolicar).				
5. Imaginar i dibuixar el desplegament de cossos i després fer el desplegament i construir el cos.				
6. Trobar relacions geomètriques entre objectes.				
B. Pel que fa a l'ús de materials				
7. Utilitzar material manipulatiu per a la visualització de les formes del pla i de l'espai i la recerca de relacions.				
8. Utilitzar material TIC per a la visualització de les formes del pla i de l'espai i la recerca de relacions.				
9. Practicar diferents tècniques de dibuix: a mà alçada, instruments de dibuix, TIC.				



C. Pel que fa a la mesura i càlcul de perímetres, àrees, volums i angles				
10. Estimar mesures d'objectes i d'espais propers, l'aula o el pati, que després es mesuraran i d'altres espais més grans que després no es mesuraran (per exemple, un camp de futbol).				
11. Practicar tot el procés de prendre mesures: decidir unitats, instruments, realitzar la mesura, comparar el resultat amb l'estimació inicial i amb els resultats obtinguts per altres companys.				
12. Mesurar perímetres amb cordes o cordills, tant sobre el paper com en espais propers, i analitzar després les regularitats i regles trobades en relació amb la forma geomètrica de l'espai mesurat.				
13. Mesurar l'àrea de figures planes utilitzant tècniques diverses: quadriculació, triangulació, descomposició, recobriment (sobreposant quadrícules amb trames de més o menys densitat de quadrícula), fórmules...				
14. Utilitzar les unitats de capacitat i volum més usuals indistintament i en contextos de la vida quotidiana.				
15. Calcular la superfície de figures diferents que tenen el mateix perímetre i a l'inrevés.				
16. Comparar perímetres i àrees de figures que tenen la mateixa àrea però no el mateix perímetre i viceversa.				
17. Treballar estratègies de descomposició de figures per a calcular perímetres i àrees sense memoritzar fórmules.				
18. Calcular la superfície de figures ortoèdriques que tenen el mateix volum i a l'inrevés.				
19. Aplicar tècniques i instruments per mesurar angles i longituds de la realitat i utilitzar-los per obtenir mesures indirectes (Thales, semblança, proporcionalitat).				
20. Fomentar que els alumnes expliquin com fan les seves deduccions i que les sotmetin a debat.				
D. Pel que fa al lligam entre els blocs de mesura i de canvi i relacions: escales				
21. Llegir mesures d'objectes representats a escala i analitzar si el valor trobat és versemblant.				
22. Representar amb l'escala més adequada l'aula, la pròpia habitació, el pati de l'institut...				
23. Situar en els plànols anteriors objectes dibuixats també a escala, taules, cadires...				
24. Deduir escales de plànols o mapes a partir del reconeixement d'algun objecte del qual es coneixen les mides reals.				
25. Calcular la superfície d'un pis en un plànol fet a escala.				
26. Comparar resultats amb els companys i analitzar les possibles fonts d'errors.				
27. Llegir i interpretar plànols utilitzats en l'àrea de ciències naturals, ciències socials...				
28. Realitzar informes de presa de mesures i elaboració de plànols de manera semblant als realitzats per a les pràctiques del laboratori.				

Una vegada estudiats els resultats de la graella, els departaments i els equips docents poden plantejar-se preguntes i arribar a acords sobre:

- quines de les propostes es treballen a les aules?
- com es treballen?
- fins a quin punt les diferents metodologies emprades per cada departament faciliten l'aprenentatge?
- quines no es treballen prou?
- quines es consideren prioritàries?
- des de quines matèries es poden treballar?
- en quins aspectes es pot incidir més adequadament, tenint presents les característiques específiques de cadascuna de les assignatures implicades?

Es recomana triar-ne algunes entre les que es considerin prioritàries, ordenar-les i planificar-ne l'aplicació. En la planificació cal incloure com s'avaluaran? (quan, qui i amb quins criteris s'avaluaran).

## Annex II – Recursos i bibliografia

### Recursos

- **ARC** (Aplicació de Recursos al Currículum: [apliense.xtec.cat/arc](http://apliense.xtec.cat/arc)). Aquesta eina web recull propostes d'activitats, seqüències didàctiques i recursos, que enllacen directament amb el currículum de matemàtiques (des d'educació infantil fins a batxillerat). Cada recurs està catalogat i descrit acuradament. Permet fer cerques detallades.
- **creamat** (Centre de recursos per ensenyar i aprendre matemàtiques: [phobos.xtec.cat/creamat/joomla/](http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/)). Aquest centre de suport facilita recursos (materials, bibliogràfics o virtuals) als centres educatius i al professorat per aconseguir un millor assoliment i desenvolupament de les competències dels alumnes en l'àmbit matemàtic, generant, coordinant i difonent idees i coneixements relacionats amb l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques.
- **Impulsem la geometria** ([phobos.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/impulsem-la-geometria](http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/impulsem-la-geometria)). Bloc específic del creamat, sorgit per donar resposta immediata a les dificultats en el camp de la geometria observades en les proves diagnòstiques de Primària i d'ESO. Per ajudar a dinamitzar el treball als centres del bloc curricular *Espai i forma* i proporcionar propostes de tipus pràctic i experimental, es presenta una proposta setmanal (*El problema de la setmana*) i una selecció comentada d'activitats de l'ARC (*Recursos*) que es poden fer a classe per a cadascun dels continguts curriculars del bloc *Espai i forma* dels quatre cursos d'ESO.
- **Entre el pla i l'espai, la visualització. Reflexions sobre el bloc Espai i Forma** (vídeo i presentació disponibles a [phobos.xtec.cat/creamato/conferencies/956-entre-el-pla-i-lespai-la-visualitzacio-reflexions-sobre-el-bloc-espai-i-forma](http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/formacio-creamato/conferencies/956-entre-el-pla-i-lespai-la-visualitzacio-reflexions-sobre-el-bloc-espai-i-forma)). Conferència de David Barba i Cecilia Calvo que proposa una reflexió sobre el treball a l'aula de la geometria en un enfocament competencial del currículum.
- **Illuminations** ([illuminations.nctm.org](http://illuminations.nctm.org)). Aquesta web del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) proporciona una gran quantitat d'applets interactius i lliçons sobre els estàndards d'educació matemàtica. Es troben organitzats per etapes (des de preescolar fins a secundària) i per blocs de continguts.
- **Geogebra** ([www.geogebra.org/cms/ca](http://www.geogebra.org/cms/ca)). Aquest programari lliure interactiu de geometria dinàmica s'ha convertit en l'estàndard en el camp educatiu. GeoGebra permet treballar la geometria, l'àlgebra i el càlcul. A Catalunya, l' Associació Catalana de Geogebra ([acgeogebra.cat](http://acgeogebra.cat)) impulsa la seva difusió, dona suport al professorat i fomenta activitats de formació.

## Bibliografia

- ALSINA, C.; NELSEN, R. B. Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics. Washington: MAA, 2006.
- AUBANELL, A. Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària. Memòria de la llicència. Barcelona: 2006.
- BOLD, B. Famous Problems of Geometry and How to Solve Them. New York: Dover Publications, INC, 1969.
- Currículum educació secundària obligatòria. Catalunya: Departament d'Educació 2009 ([www.xtec.cat/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/fe124c3b-2632-44ff-ac26-dfe3f8c14b45/curriculum\\_eso.pdf](http://www.xtec.cat/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/fe124c3b-2632-44ff-ac26-dfe3f8c14b45/curriculum_eso.pdf))
- Competències bàsiques. Educació secundària obligatòria. Primer cicle. Proves d'avaluació - Àmbit matemàtic. Anàlisi de resultats i orientacions per a la millora. Catalunya: Departament d'Educació 2007 ([www.xtec.cat/web/curriculum/avaluacio/provescb/secundaria/orientacentres](http://www.xtec.cat/web/curriculum/avaluacio/provescb/secundaria/orientacentres))
- DELONG, M.; WINTER, D. Learning to Teach & Teaching to Learn Mathematics. Washington: MAA, 2002.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Estats Units, 2000 ([www.nctm.org](http://www.nctm.org)). Hi ha traducció castellana: Principios y Estándares para la Educación Matemática. Puerto Real (Cádiz): Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 2004.
- STEEN, L. A. Matemáticas en la vida cotidiana. Madrid: Ed. Addison-Wesley, 1999.

## Articles

- ARRANZ, J.M.; LOSADA, R.; MORA, J.A.; SADA, M. "Realidades de GeoGebra", SUMA, 67, juny de 2011, 7-20.
- PEÑA, A. "Las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en la ESO", SUMA, 69, març de 2012, 37-48.
- ROMERO, F.; MASSA, M.R., 2003, "El teorema de Ptolemeu", *Biaix*, 21, 31-36.

## ANNEX III - Models d'activitats

A continuació es presenten alguns exemples d'activitats relacionades amb la geometria i la mesura. Totes han estat extretes de la gran selecció d'activitats, seqüències didàctiques i recursos que l'ARC (Aplicació de Recursos al Currículum) posa a disposició del professorat.

Cadascuna d'aquestes activitats consta, com totes les de l'ARC, d'una descripció acurada, d'un etiquetatge complet (tipus d'element didàctic, processos que desenvolupa i relació amb altres àrees, etapa i nivell en què s'ubica, continguts curriculars que tracta), d'una proposta d'aplicació didàctica (que inclou temporització, comentari dels aspectes didàctics i metodològics i la relació de recursos emprats), de documentació per a l'alumnat (si és necessària) i, quan sigui el cas, d'enllaços als recursos audiovisuals i/o TIC necessaris per desenvolupar l'activitat.

S'ha procurat que aquests exemples corresponguin a diferents moments de l'etapa i mostrin metodologies diverses

- **Trigonometria a l'Estany** (<http://apliense.xtec.cat/arc/node/1575>). És una mostra de treball, en grups heterogenis, d'aplicació de la geometria en un entorn natural. Bàsicament es treballa la trigonometria i es combina l'ús de tecnologies tradicionals i actuals. S'inclou un vídeo de TV3 que permet fer-se una idea completa de l'activitat (<http://www.tv3.cat/3alacarta/#/videos/2877390>).
- **Activitat a partir del vídeo "La geometría se hace arte"** (<http://apliense.xtec.cat/arc/node/1541>). És un exemple d'explotació d'un recurs audiovisual, en aquest cas un vídeo de lliure difusió de la interessant sèrie *Universo matemático*, disponible a internet. Es planteja la visualització d'un vídeo centrat en els mosaics i en l'obra de M.C. Escher, acompanyada d'un qüestionari amb preguntes de comprensió del vídeo, com a continuació del treball previ a classe sobre els moviments en el pla.
- **Poliedres amb làmines de plàstic** (<http://apliense.xtec.cat/arc/node/1326>). És una mostra de treball de manipulació de materials. Concretament, s'utilitzen làmines de plàstic transparent i cinta adhesiva per construir poliedres dels quals podem visualitzar l'interior. Utilitzant retoladors no permanents i fils de llana és possible estudiar a fons algunes de les propietats d'aquests poliedres i les relacions que s'estableixen entre ells.
- **El teorema de Tales i el seu recíproc** (<http://apliense.xtec.cat/arc/node/1735>) i **El volum de l'esfera** (<http://apliense.xtec.cat/arc/node/1459>) són dos exemples d'ús de GeoGebra més enllà de la simple visualització, ja que l'alumnat ha de fer comprovacions i utilitzar llenguatge algebraic. En tots dos casos es faciliten els applets preparats per a l'ús immediat i les preguntes suggerides per guiar el treball de l'alumnat.
- **Els cossos geomètrics** (<http://apliense.xtec.cat/arc/node/1166>) no és la proposta d'una activitat sinó una seqüència didàctica completa composta per diverses activitats, en què es treballen prismes, piràmides, cossos platònics i cossos de revolució. Consisteix en activitats d'exploració amb GeoGebra, intercalades amb activitats manipulatives. La seqüència didàctica completa està disponible en pàgina web i també en paquet SCORM instal·lable en un curs Moodle.